

L.
LYCEUM

COLECȚIA LYCEUM

FLORICA T. CÂMPAN
A treia carte cu
PROBLEME CELEBRE
din istoria matematicii



EDITURA ALBATROS

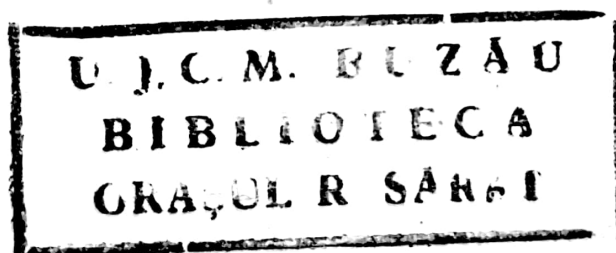


$51 = 2$
617

Prof. dr. docent
FLORICA T. CÂMPAN

A treia carte cu PROBLEME CELEBRE din istoria matematicii

15.428
=



EDITURA ALBATROS

PROBLEMA NUMERELOR PRIETENE

sau

DESPRE TIRANIA NUMERELOR ÎNTREGI

Cînd am primit scrisoarea pe care mi-a trimis-o prietenul meu Teodor Solonar, am înțeles că-i bolnav și am plecat imediat la Cîmpulung. Slăbise mult, avea o paloare care nu mi-a plăcut, dar nu-și pierduse prospețimea sufletească și nici buna lui dispoziție.

— Bine, măi Toa, i-am spus după ce ne-am băut cafelele, de ce nu mai zăbovești și tu în pat, așa cum îi plăcea lui Descartes să o facă? De ce umbli, fără noimă, de ici pînă colo, dacă vezi că nu ți-e bine?

— Poate fiindcă nu vreau să mor în pat!

— Las' că încă nu ți-e nasul de moarte!

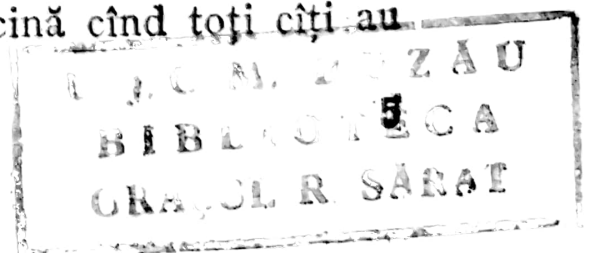
— Asta n-o știe nimeni, da' oricum, aruncă omul și cîte o vorbuliță mai anapoda atunci cînd îi sîcîit de cel mai bun prieten al lui.

— Din vorbulițele tale înțeleg că habar n-ai ce înseamnă *prietenia*, așa că te sfătuiesc să citești *De amicitia* lui Cicero!

— Ba să am iertare, că și Cicero, consider că „prietenia înseamnă acordul perfect în toate problemele omenești”. Așadar, mai meditează tu la Cicero și privește starea mea de acum, cu aceeași indiferență ca și mine, cu alte cuvinte fi „un alt eu”, ca să folosesc formula lui Pitagora.

— Eu credeam că expresia aceasta, *alter ego*, devenită proverbială de cînd a folosit-o Cicero, a inventat-o Ennius și nu Pitagora.

— Pitagora a trăit cu cel puțin trei secole înaintea lui Ennius așa că nu a putut-o lua el de la Ennius. Dar ce rost ar avea să ne certăm din această pricină cînd toți cîți au



scris despre prietenie, Platon în *Lysis*, Aristotel în *Etica nicomahică*, Plutarh, Montaigne și alții din timpurile noastre, oricât de meșteșugite le-au fost vorbele tot n-au mai adăugat nimic peste lapidarul *alter ego*; de pildă, ce spune mai mult Emerson, în eseul lui *Despre prietenie*, când arată că: „singura cale ca să ai un prieten este ca tu însuși să fii unul“?

Drept răspuns, l-am întrebat:

— Ce-ar fi dacă, urmînd cărarea pe care ai apucat-o, te-ai opri pe domeniile mătăle și mi-ai prezenta *numerele prietene*? De atîtea ori mi-ai tot promis că ai să o faci!

Teodor Solonar m-a privit lung, nuanța verzuie a ochilor lui sclipea sub sprîncenele-i castanii, stufoase. Am crezut că va încerca să amîne iar această discuție, dar el s-a îndreptat înspre dulapul cu cărți, a luat un caiet și după ce l-a pus pe masă mi-a spus:

— Cicero a scris *De amicitia* fiindcă i-a cerut prietenul lui, Atticus, eu am scris *Despre numerele prietene*, chiar mai înainte de a mi-o fi cerut tu. Iată dovada.

Nu-mi venea să cred, gestul mă răscolise, dar ca să nu se observe l-am înfruntat:

— Mare hoțoman mai ești! Mătăle te-ai pregătit pe-ndelete și eu mă minunam de cele ce-ți ieșeau din gură! Mă tem că dacă te lăsam să continui mi-ai fi înșirat pe nerăsuflete și cîteva perechi de prieteni celebri!

— Cred și eu! Ascultă: Ahile și Patrocle, Teseu și Piritus, Oreste și Pilade. Asta din mitologie și dacă ai uitat poveștile lor, sînt gata să ți le împrăpățez. Acum las la o parte alte perechi celebre ca să-ți prezint numai o pereche de matematicieni, Arthur Cayley și James Joseph Sylvester, despre care tare mi-ar face plăcere să-ți vorbesc odată, altădată!

— Recunoaște deci că m-ai tras pe sfoară!

— Nici vorbă de așa ceva. Am fost silit de împrejurări!

— Lasă gluma și spune-mi serios de ce te-ai hotărît să alegi acest subiect?

— Îți jur că niciodată n-am vorbit mai serios ca acum! Am fost silit de împrejurări și dacă nu mă crezi, iată faptele: Acum vreo cîteva săptămîni, m-am pomenit cu un cunoscut

PITAGORA



de-al meu, care a venit să mă întrebe, ce știu eu despre numărul 220? Am bănuț indată despre ce putea fi vorba, dar eram curios să aflu cum a ajuns el, avocat de meserie, la acest număr și l-am întrebat. Drept care m-a privit pe deasupra ochelarilor, a scos o hirtie din buzunar și mi-a spus:

— Ascultă aici ce am citit într-un roman a cărui acțiune se petrece în Evul Mediu: Ca să-și asigure protecția unui senior ce-l dușmănea, un cavaler a trimis acestuia un dar foarte curios fiindcă l-a potrivit în așa fel ca să cuprindă *exact* 220 de bucăți. Anume, saci de griu, de poame uscate, vase de vin, de ul i, oi, porci și la acestea a adăugat o pungă de bani, atîția la număr cît mai era nevoie ca împreună cu numărul celorlalte bunuri să ajungă la 220. Trucul i-a reușit, iar autorul romanului comentează această preferință a cavalerului, arătînd că numărul 220 era unul din perechea 220, 284, numită *numere prietene*, fiindcă fiecare dintre numere este astfel alcătuit încît părțile unuia îl formează, prin adunare, pe celălalt! După cum știi, eu n-am dus nici-

odată casă bună cu matematicile și am venit să-mi dai o mînă de ajutor, fiindcă ți-a mers buhul în tîrgul nostru, că nimeni nu te-ar întrece în această direcție! Te-aș ruga să mă lămurești, căci mie nu-mi pare deloc logic, ca părțile unui număr — de pildă 220 — să dea prin adunare un număr mai mare decît el, adică 284 și nici că ar fi cu puțință ca părțile lui 284 să micșoreze numărul, făcîndu-l egal cu 220!

— Ei, așa mai vii de-acasă, l-am întrerupt pe Teodor Solonar care se străduia să fie cît se poate de serios. Lucrarea ta îi este dedicată lui! Sînt chiar foarte curios să aflu cum l-ai ademenit pe stimatul avocat să dea tîrcoale matematicilor? Îmi pare tare rău că nu am fost și eu de față!

— Nu regreta nimic, fiindcă am să-ți redau cu fidelitate convorbirea dintre noi. Mai întîi m-am încredințat că pentru el numerele nu însemnau altceva decît un mijloc de a stabili relațiile financiare, buget, economie... A trebuit deci să încep a-i prezenta și o altă față a lor. I-am arătat că există *numere prime* și *numere compuse*, că, de exemplu, numerele 3 sau 5 sau 7 sînt prime fiindcă nu se împart decît cu ele însele sau cu unu, care dealtfel împarte toate numerele, pe cînd 6 sau 30 sînt numere compuse, fiindcă au și alți divizori, căci $6 = 2 \cdot 3$ iar $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. I-am atras apoi atenția că aceste numere, 6, 30 și celelalte de acest fel, se prezintă ca un produs de factori primi, că 6 are ca factori primi pe 2 și pe 3 și așa mai departe. Lucrurile păreau să meargă destul de bine și de aceea am atacat îndată miezul problemei, adică l-am pus să-l descompună pe 220 în factori primi. A făcut-o, dar cînd a constatat că ei sînt 2, 2, 5 și 11 mi s-a înfundat. Numai ce-l văd că-și șterge ochelarii, se scarpină în cap și-mi spune:

— Bine, profesorașule, parcă era vorba să-mi dovedești că părțile lui 220 fac 284 și nu $2 + 2 + 5 + 11$ adică 20!

— Pariez că, luat așa prin surprindere, ai tăcut chitic, nu-i așa? l-am întrebat amuzat la culme de cele ce-mi povestea.

— Da, a spus Teodor Solonar. Nu înțelegeam ce l-a apucat! Schimbase și tonul și era așa de satisfăcut că m-a prins cu ocaua mică, încît dintr-odată, cînd am înțeles că puteam dezumfla balonul cu o înțepătură de ac, mi s-a făcut milă

de el și n-am făcut-o. Mi-am cerut scuze că nu i-am atras atenția asupra deosebirii ce există între factorii primi ai unui număr și divizorii lui, care se mai numesc și *părțile lui alicote*, că divizorii unui număr nu sînt numai factorii lui primi, ci și produsele formate de aceștia. I-am arătat că la aceste părți făcea aluzie comentatorul și că tocmai într-acele aveam de gînd să-l îndrept cînd a intervenit el cu observația aceea oarecum pripită. Reluînd calculele, am adăugat și pe unu printre factorii primi și atunci a putut constata că, într-adevăr, prin adunarea părților lui 220: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110$, se obține exact 284.

— Cred că s-a bucurat cînd a stabilit acest rezultat, nu-i așa?

— Nu prea! Mai degrabă cred că a fost dezamăgit că nu m-a putut înfunda, fiindcă nu l-am auzit pronunțînd decît „mda”. Aveam impresia că-i slăbise și elanul — făcuse probabil un prea mare efort matematic! — eu însă m-am încăpățînat să duc lucrul pînă la capăt, așa că i-am propus să descompunem și pe 284 în factori ca să se convingă că și „inversul” este adevărat. De data aceasta s-a orientat cu ușurință, a notat pe hîrtia lui rezultatul $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$, apoi a îndoit hîrtia, a pus-o în buzunar și s-a sculat. Mi-a întins mîna cu un zîmbet politicos, luîndu-și rămas bun: Așadar, asta a fost toată filozofia și toată taina?

Iar m-a apucat, nu știu cum, o jale de uscăciunea din sufletul omului acesta și m-am decis să picur în el un strop de desfătare. Am început să-i spun că pe aceste două numere Pitagora le-a numit *numere prietene*, și i-am arătat de ce, apoi, că ele au interesat, prin proprietatea care o au, pe mulți matematicieni greci și arabi din Evul Mediu și din Europa apuseană și chiar pe matematicienii din zilele noastre. Mă bucuram văzînd cum i se destinde chipul, a zîmbit, și mă pregăteam să-l opresc ca să bem o cafea și să-i arăt cît de interesante sînt problemele din teoria numerelor, că Fermat era și el jurist, cînd îl aud spunîndu-mi: — Ca să vezi cu ce-și pot bate oamenii capul! Curat vorba bătrî-

nească: Satul arde și baba se piaptână! Auzi aiureală: „Numere prietene“. Nu-s oamenii prieteni și au să fie numerele! După ce am închis ușa în urma lui, m-am întors la masa asta de lucru, am început să răsfoiesc cărți și note și să-mi notez în acest caiet tot ce-am putut. În același timp, ca plăcerea să-mi fie deplină, am citit sau recitit toate cărțile despre prietenie ce mi-au căzut în mână și mi-am notat câteva păreri, pro și contra ei. De pildă, aceasta a lui Aristotel din *Etica nicomahică*: „Prietenia este o virtute sau cel puțin a fost însoțită întotdeauna de virtute. În plus, este una dintre trebuințele cele mai necesare ale vieții, nimeni nu va accepta să trăiască fără prieteni, chiar dacă ar avea toate bunurile celelalte“. Și părerea amărîtului de La Rochefoucauld: „Ceea ce au numit oamenii prietenie nu este decît o asociație, o menajare reciprocă a intereselor și un schimb de servicii, în sfîrșit, nu e decît o negustorie în care amorul propriu își propune ceva de cîștigat“.

— Trebuie să recunosc, dragă Toader, că nu știi niciodată de unde sare iepurele. Eram cu adevărat gelos pe acest avocat și cînd colo, numai datorită lui am să mă pot lăfăi lîngă numerele ce au fost purtate la piept, drept talisman, secole de-a rîndul de către toți cei ce-și doreau să rămînă prieteni pe viață. Și tot lui trebuie să-i mulțumesc că te-a făcut să apreciezi „înaltele mele calități de ascultător“! Sper că ai tras concluziile cuvenite, anume că asemenea specie de prieten este o floare rară ce trebuie cultivată cu grijă, ca să nu se veștejească!

— Așa-mi trebuie dacă n-am avut ce face și nu te-am lăsat să-ți închipui că ești mai tare ca Sherlock Holmes, așa-mi trebuie dacă am vorbit ce nu trebuia!

— Atunci repară și spune numai ce trebuie. De pildă, povestea lui Iamblic cu care amicul matale nu a fost de acord!

— Bine dar tu o cunoști! Totuși dacă vrei s-o mai auzi, așteaptă să aduc și cafelele ce au rămas nefăcute de atunci!

— Bine-zis, că nu-i pentru cine se gătește! Eu deschid caietul pînă atunci. A, uite! văd aici că povestea se află în *Comentariile* lui Iamblic la *Aritmetica* lui Nicomah din

Gherasa care a scris această carte prin jurul anului 100 al erei noastre.

— Se spune, a început prietenul meu povestea după ce a pus cafelele pe masă, că odată a venit cineva la Pitagora și l-a rugat să-i arate cum ar trebui să fie doi oameni, unul față de altul, ca să se poată numi cu adevărat prieteni? Să se comporte ca numerele 220 și 284, a răspuns Pitagora, fiindcă aceste numere sînt astfel că fiecare din ele este format din suma părților celuilalt, adică fiecare este *un alt eu*.

— Nu cred că a fost vreodată o mai adîncă definiție a prieteniei! Pitagora a putut-o găsi, fiindcă pentru el, universul întreg, precum și toate părțile lui, se abstractizau în numere. Cînd impunea condiția ca unul dintre numere să fie suma divizorilor celuilalt, să cuprindă adică tot ce are celălalt număr mai intim în ființa lui, sau, transpus la oameni, toate gândurile, toate aspirațiile, toate preocupările unuia să aibă sălaș în sufletul celuilalt. Or, ca să se petreacă aceasta, oamenii nu pot fi luați la îndeplinire, după cum nici numerele nu-s oarecari, ci numai 220 și 284. Cînd am terminat, Teodor Solonar a luat caietul și l-a răsfoit. Apoi mi-a spus:

— Cred că Cicero a cunoscut această definiție a lui Pitagora și s-a gândit, ca și tine, la semnificația ei. Uite ce scrie el în *De amicitia*: „Natura, mai mult decît necesitatea, dă naștere prieteniei, ea are la origine o chemare a inimii și un sentiment de afecțiune și nicidecum gîndul la foloasele pe care le-ar putea trage”. Cîtă deosebire între el și La Rochefoucauld, sau Helvetius care scria: „Nu există prietenie fără interes; ar fi un efect fără cauză”.

— Constat că-ți place să te abați din drum! În locul lui Helvetius îl prefer pe sirianul Iamblic, care după cîte știu a scris mai multe cărți despre Pitagora.

— Da, a scris 9 cărți, însă nu s-au păstrat decît patru. În ele se cuprind cele mai multe informații ce le avem despre școala lui Pitagora, numai că redacte după vreo mie de ani!

— Și de la Iamblic pînă acum au trecut peste 1500 de ani. Ce-nseamnă însă veacurile pentru noi? Jonglăm cu ele mai bine decît artiștii de la circ cu farfuriile sau făcliile aprinse!

— Prea presumțioasă ți-e afirmația! Mai degrabă cred că ne strecurăm printre veacurile trecute ca să savurăm farmecul și suavitățile unor probleme pe care trecerea acestor veacuri nu le-a stins, de pildă numerele prietene sau alte proprietăți ale numerelor, stabilite de pitagoreici.

— Rămân la părerea mea, eu am senzația că jonglez cu veacurile prefăcute-n farfurii sau în torțe; pe acestea le arunc cu o anumită măiestrie în urma mea și iată-mă ascultându-l cu înfrigurare pe Pitagora însuși, tălmăcindu-mi legile Universului cu ajutorul numerelor... „singurele în stare să ne apropie de legile naturii, pe care numai înțelegându-le le putem stăpîni”.

— Admit entuziasmul tău care a înfruntat și el zecile de ani și-mi pare rău că trebuie să-l mai temperez! E greu de afirmat cu certitudine ce a spus și ce a gândit Pitagora, fiindcă el n-a scris nimic. Tot ce știm s-a păstrat numai prin tradiție, învăluit în legendă și scris de elevii din școala lui. Un fragment păstrat de la Philolaos, pitagoreic de la sfârșitul veacului V î.e.n., ar putea fi pus alături de cele ce afirmi tu mai înainte: „Tot ce se poate recunoaște are număr, căci fără de număr nu este posibil să cuprinzi ceva cu gândul sau să recunoști”.

— Admirabil! Spune-mi dacă această frază nu-î valabilă și azi, scrisă cu exact aceleași cuvinte ca și acum 2400 de ani?

— Nu te contrazic decît numai ca să-ți atrag atenția că înțelesul cuvîntului *număr* nu mai este același ca pe vremea lui Pitagora. Aristoxen din Tarent, de pildă, care a trăit cu vreo sută de ani după Pitagora, afirma că Pitagora privea Aritmetica drept cea mai frumoasă și mai favorizată știință, fiindcă numai pentru ea lucrurile apar sub forma numerelor!

— Iar mi-ai dat apă la moara mea! Dacă nu mă-nșel Gauss, marele Gauss, a spus-o în plin secol al XIX-lea că „Aritmetica este regina matematicilor”, adică nu a „spus”, ci a repetat cele afirmate de Pitagora.

— Ai dreptate! El a făcut descoperiri de seamă în toate domeniile matematicilor dar a îndrăgit îndeosebi Teoria

numerelor, așa că era îndreptățit să spună că : „Matematica este regina științelor, iar Aritmetica regina matematicilor“.

— Am citit odată, într-o carte, că matematicienii care fac atîta caz de logică, au o terminologie foarte puțin logică! Nu vreau să discutăm această chestie acum, dar mi-a venit în minte fiindcă te aud spunînd cînd *Teoria numerelor*, cînd *Aritmetică*. Știu bine că este o deosebire între aceste două denumiri, și de aceea aș vrea să o precizăm.

— *Teoria numerelor* este un termen mai nou, folosit din secolul al XVIII-lea pentru capitolul din Aritmetică ce se ocupă numai cu studiul proprietăților numerelor întregi. Cînd Gauss vorbește de *Aritmetică*, el se referă, de fapt, la *Teoria numerelor*. *Aritmetica* însă (de la *arithmos* care în grecește înseamnă *număr*) studiază proprietățile tuturor numerelor întregi, raționale și iraționale precum și metodele practice privind operațiile cu numere și, de asemenea, problemele legate de diferite sisteme de numerație. La greci însă, aritmetica era știința numerelor întregi, adică exact ceea ce numim azi „*Teoria numerelor*“.

— Știu că Pitagora și toți matematicienii greci de după el, inclusiv Euclid, considerau ca numere numai întregii, iar fracțiile și numerele iraționale erau privite drept mărimi care exprimau o măsură, uneori prin numere întregi, dar alteori nu. Știu că operațiile elementare dintre numere erau explicate în „Logistică“, cuvîntul *logistiki* avînd chiar înțeles de „calcul numeric“. Acum e clar că atunci cînd vom vorbi de Aritmetica grecească ne vom referi la ceea ce azi se numește Teoria numerelor. Nu s-ar putea spune că *numerele întregi* au exercitat o cruntă tiranie asupra matematicienilor greci?

— Ba da, dar era o tiranie care le era pe plac! Egiptenii, babilonienii, hindușii sau alte popoare din antichitate au privit numerele dintr-un punct de vedere mai realist, care se aseamănă cu cel de azi și numai datorită acestei concepții generale despre număr s-au putut dezvolta metodele practice de calcul și tehnica lui. În schimb, grecii au transferat problemele legate de fracții și de numerele iraționale în domeniul geometriei și eliminînd problemele practice, au putut stabili

acele minunate proprietăți ale numerelor întregi, care au delectat antichitatea, pe matematicienii din Evul Mediu, din Renaștere și din Epoca modernă.

— Dacă mă gândesc mai bine, mi se pare că înțeleg de ce grecii au crezut că numai întregii sînt numere. Deși în natură se întîlnesc ambele înfățișări distincte și opuse: *discretul* și *continuul*, discretul e singurul care se *numără*, pe cînd continuul se *măsoară*. Lucrurile vii nu se pot împărți: o jumătate de vacă nu mai rămîne vacă vie care să dea lapte, un sfert de ou nu mai este un ou și din el nu va mai ieși un pui, aceste obiecte se păstrează numai ca unități indivizibile. Mulțimea lor se *numără* și rezultatul *numărării* se exprimă prin numere întregi. Teoria atomică a lui Democrit sau mulțimea stelelor de pe cer pledează pentru unitățile indivizibile. Tot stelele însă, prin mișcarea lor neînteruptă pe bolta cerească, ca dealtfel și drumul descris de un pește în apă, de o pasăre în zbor, oferă imaginea mărimilor continue. O jumătate de măsură de miere sau de lapte are sens și obiectul nu-și schimbă identitatea după cum un sfert dintr-un ogor poate fi lucrat exact ca și cum ogorul nu ar fi fost împărțit. Acestea sînt exemple de mărimi continue care nu se mai *numără* ca mărimile discrete ci se *măsoară*! Totul este număr, a spus Pitagora, totul curge, spune Heraclid. Grecii au separat ceea ce de fapt se împletește și nu se poate separa, dar în felul acesta au putut păstra și cea mai simplă, cea mai naivă și cea mai plastică noțiune de număr. Cîndva, cînd ai încercat să-mi spui ce se înțelege azi prin număr, m-am încrîncenat, nu era de mine. Hai să mai zăbovim în preajma lui Pitagora și să-mi arăți unele dintre proprietățile numerelor întregi pe care le-a descoperit el sau la care a cugetat.

— Mai întîi să facem o precizare. Nu e vorba de numerele întregi, ci de *numere naturale*. În mulțimea *numerelor întregi* se cuprinde și *zero* și *numerele negative* care nu făceau parte din mulțimea numerelor considerate de Pitagora. În privința proprietăților numerelor naturale, cred că cea mai veche descoperire rămîne deosebirea dintre numerele *pare* și *im-*

pare. Opoziția dintre *par* și *impar* forma chiar una dintre cele 10 categorii filozofice ale pitagoricienilor, dintre care cinci erau exprimate chiar în termeni matematici.

— Le știi și pe celelalte patru?

— Nu, dar le am notate aici în caiet. Iată-le: *unu-multiplu*, *limitat-nelimitat*, *drept-curb*, *pătrat-nepătrat*. Și, ca să vezi câtă atenție și cât de la modă era problema par-impar, uite că am notat, tot aici în caiet, un fragment din Epiharm, datînd din secolul V î.e.n.

— Da? Trebuie să fie Epiharm din Siracuza, care a scris mai multe comedii.

— Întocmai, și de aici poți deduce că preocuparea nu aparținea numai matematicienilor, ci se răspîndise de pe atunci, în cercurile mai largi. Iată ce scria el: „Dacă cineva vrea să adauge o piatră la un număr impar sau chiar la unul par, sau să ia o piatră dintre cele care există, crezi oare că numărul are să rămînă la fel?” Un secol mai tîrziu, Aristotel scria: „Aritmetica răspunde la întrebarea: ce este imparul, parul, un pătrat, un cub”.

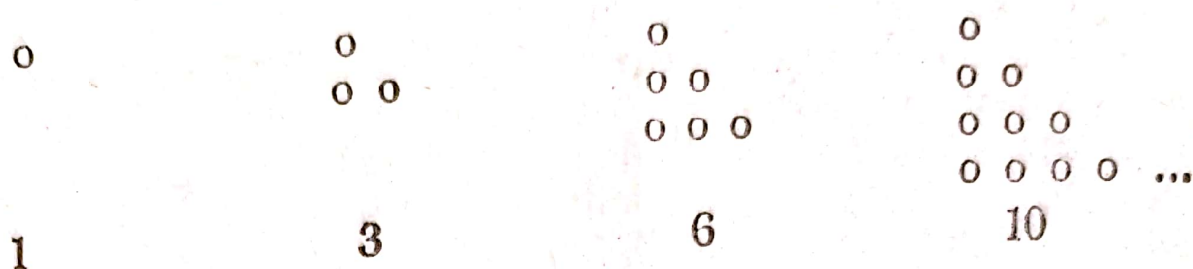
— Văd că în cele două citate, în primul direct, în celălalt indirect, se face aluzie la folosirea pietricelelor pentru numărare. Știu că de obicei erau alese pietricelele de aceeași mărime și formă.

— Da, numai că numele de „calcul” se trage de la numirea latinească a pietrei și nu de la numirea grecească „psifi” care avea înțeles mai degrabă de literă, ca semn.

— Poate fiindcă romanii au folosit pietrele în abacele cu care efectuau, de fapt, calculele practice, socotelile, pe cînd grecii se jucau cu ele, imaginînd figuri geometrice și numărînd cîte pietricele le cuprind. Poate că, de multe ori grecii nici nu mai foloseau pietre adevărate, ci le înlocuiau cu puncte pe care le desenau. În felul acesta, ei au descoperit și au izolat șiruri întregi de numere, care se formau după anumite legi, aveau anumite proprietăți și se reprezentau prin aceleași figuri. De aici și numele de *numere figurative* care le-au rămas pînă azi.

— Probabil că la asemenea numere s-a referit Aristotel cînd a numit pătratul sau cubul?

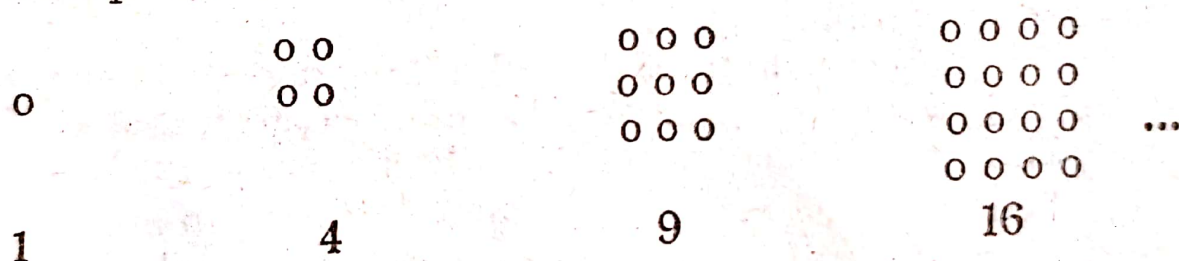
— Da. Uite de pildă prin *numere triunghiulare* se înțeleg acelea în care pietrele, sau punctele, se pot așeza sub formă de triunghi dreptunghic sau isoscel:



Dacă te uiți la ele, vezi că asemenea numere se formează prin adunarea succesivă a numerelor din șirul natural:

$$1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \dots$$

În același timp, aceste numere, fiind în progresie aritmetică cu rația 1, știi că suma lor, dacă numărul termenilor se notează în general cu n , este dată de formula $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, or, această formulă are o interpretare geometrică. Ea este aria unui triunghi cu baza n și cu înălțimea $n + 1$ sau invers. Așadar, iată numirea justificată. Cît despre *numerele pătrate*:



ele se obțin prin însumarea numerelor impare consecutive:

$$1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 3 + 5 = 9, \dots$$

Aplicînd aceeași regulă, a progresiilor aritmetice cu rația 2, șirului format din n numere, rezultă:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

De aceea, numerelor pătratice li s-au spus prin prescurtare *pătrate* și azi se spune tot așa: 25 este pătratul lui 5, iar 5 este rădăcina pătrată a lui 25! Grecii nu spuneau rădă-

cină pătrată, ci și mai sugestiv, „latură”: „Pătratai 25 are ca latură pe 5”. Numerele pătrate se pot obține și prin alăturarea a câte două numere triunghiulare egale; în acest caz, una dintre baze se suprimă, după cum vezi ușor de pe figură. Aceasta revine la a aduna două numere triunghiulare consecutive:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n-1+n+1) = n^2.$$

Metoda de a deduce *numerele poligonale* din numerele triunghiulare a fost generalizată de către Hipsicle din Alexandria, care a trăit prin secolul II î.e.n. El a stabilit și o formulă care exprimă numerele ale căror puncte se pot așeza sub forma unui *pentagon regulat* (pentagonale), sau sub formă de hexagon (hexagonale) etc. Notînd cu p numărul laturilor poligonului respectiv, formula stabilită de el este:

$$n_p = \frac{1}{2} n [2 + (n-1)(p-2)].$$

— Ia să vedem ce dă această formulă pentru pătrat:

$$n_4 = \frac{1}{2} n [2 + (n-1) \cdot 2].$$

Așadar regăsim, cum era și de așteptat, pe n^2 .

— După cum ți-am arătat, suma numerelor impare consecutive generează pătratele. Suma numerelor pare consecutive dă naștere la *numerele dreptunghiulare*:

	o o o	o o o o
o o,	o o o,	o o o o
		o o o o , ...
2	6	12

$$2, 2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3, \quad 2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4, \dots$$

$$2 + 4 + 6 + \dots (2n + 2) = n(n + 1).$$

Toate aceste feluri de numere reprezintă arii de figuri plane, de aceea se numesc, cu un cuvînt, *numere plane*. Aceasta fiindcă se pot imagina și *numere solide*, punctele lor fiind așezate în straturi succesive care să formeze o

piramidă, un paralelipiped, sau un cub, iar expresia lor generală va fi un produs de trei factori, ca de pildă, în cazul paralelipipedelor, $N = n(n+1)(n+2)$ sau a cuburilor, $N = n^3$.

— Bine, să zicem că puterea a treia a unui număr este considerată de matematicianul grec drept volumul cubului de latură n , dar puterea a patra?

— Nu știu dacă au ajuns la ea. În acest caz, desigur că au avut oleacă de bătaie de cap cu asemenea numere, dar, de obicei, ei evitau problemele ce nu le conveneau. Știi bine câte dificultăți existau din cauza condiției de a rezolva problemele de geometrie folosind numai rigla și compasul. Însă metoda de a privi numerele sub forma de produse i-au făcut să descopere și numerele care nu se descompun în factori, adică *numerele prime*, numere numite de ei „rectilinii” sau „liniare”. Stabilirea proprietăților acestor numere i-a preocupat mult pe greci. În cartea a VII-a a *Elementelor*, Euclid le definește astfel: „11. Număr prim este acela pe care-l măsoară numai unitatea”. Spre deosebire de Euclid, dar fără să-l contrazică, Aristotel spunea că: „pe un număr prim nu-l măsoară nici un număr”!

— Înțeleg de ce! Aristotel considera că unu nu era număr, ci *unitatea* din care se formau numerele, așa că nefiind număr, Aristotel are dreptate. Euclid credea la fel. În prima definiție din cartea a VII-a găsim: „Unitatea este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu” și definiția a doua: „Iar număr o mulțime compusă din unități”. Așadar, *unitatea* și nu numărul *unu* măsoară numărul prim!

— Ai explicat mai bine decât aș fi fost eu în stare să o fac!

— Te cred, m-ai dăscălit atîta cu Euclid al tău că, de multe ori, în loc să iau un roman de aventuri iau *Elementele* traduse de Victor Marian și mă uit prin ele. Mai ales că le am de la tine!

— Te rog lasă dulcegăriile de o parte! Văd că te lauzi cu *definițiile* din cartea a VII-a, îți mai amintești poate vre-una?

— Desigur, trec peste acelea care stabilesc numărul *pereche*, sau *nepereche*, sau *pereche ori pereche* sau *nepereche ori*

nepereche sau *pereche ori nepereche* și mă opresc la definiția 22: „Număr perfect este acela care este egal cu părțile sale“. Dacă nimeni nu te-a întrebat despre numerele perfecte, uite că o fac eu, rugându-te să-mi explici ce-au mai găsit oamenii și la acest fel de numere? Or, poate acest subiect nu se găsește printre filele caietului de pe masă?

— Ba da! Tot căutînd articole despre numerele prietene, am dat peste unul, apărut în revista americană de istoria matematicilor, pe nume *Scripta mathematica*, publicat în 1946 de către E.B.Escott, pe care te-aș ruga să-l cauți aici în caiet!

— Doar nu s-o fi intitulat „despre numerele perfecte“!

— Nu, ci „despre numerele prietene“. După ce-l găsești, citește te rog cum începe!

— „Teoria numerelor a fost continuu studiată din timpul lui Pitagora pînă acum. Două subiecte preferate au fost *numerele perfecte* și *numerele prietene*“. Însă, după ce dă definiția numerelor perfecte și îl amintește pe $6 = 1 + 2 + 3$, văd că nu se mai ocupă de ele, ci numai de cele ce sînt anunțate în titlu.

— Și? Nu ajunge un ciomag la un car de oale? Ori crezi că alte cărți sau reviste nu mai pomeneau de ele? Dealtfel, nu știu dacă ai trecut mult dincolo de pagina cu definiții din cartea a VII-a a lui Euclid sau ai preferat să rămîi la ele ca să le pătrunzi? Mă îndoiesc că ai ajuns pînă la teorema a 36-a din cartea a IX-a a Elementelor.

— Da, o cunosc, este o teoremă foarte indigestă, nu numai în demonstrație, dar și ca enunț. De aceea chiar aveam de gînd să o discutăm, dar mai bine să-ți spun întîi o șaradă. Iată despre ce-i vorba: Lucian povestește că la Pitagora a venit odată un negustor care l-a rugat să-l învețe filozofia. Drept răspuns, Pitagora i-a zis: „Te voi învăța să numeri!“ Deziluzionat, negustorul i-a răspuns: „Asta o știu eu foarte bine!“. „Atunci numără“, i-a replicat Pitagora și negustorul a început: „unu, doi, trei, patru,...“ Pitagora i-a făcut semn să tacă și i-a spus: „Te opresc aici căci ceea ce iei dumneata drept patru este zece, un număr perfect și simbolul nostru“.

— Cunosc anecdota și bănuiesc eu ce te doare! Vrei să-mi arăți că Pitagora nu știa ce spune, căci 10 nu-i un număr perfect, fiindcă suma divizorilor lui: $1 + 2 + 5 = 8$ este mai mică decât 10 , așadar un număr neperfect.

— Exact! Și cu asta sper că te-am făcut praf nu numai fiindcă ai putut constata cât de înalte sînt cunoștințele mele, dar și pentru că nu prea văd cum ai să ieși din încurcătură!

— Da, grea problemă cînd ai de-a face cu cărturari luminați! Negustorul acela trebuie să se fi minunat de răspunsul lui Pitagora și dacă nu a fost înfumurat și i-a urmat învățătura, a aflat îndată că Pitagora îi arătase numerele triunghiulare: $1, 3, 6, 10$. Zece este al *patrulea număr triunghiular* și, mai mult, el este un triunghi perfect, fiindcă aria lui se exprimă prin decadă. Aici *perfect* nu este folosit cu înțelesul strîmt al unei categorii de numere, tot așa după cum mai tîrziu, prin secolul II, Theon din Smirna numea *perfect* pe numărul 3 , fiindcă „el este primul număr care are început, mijloc și sfîrșit și este, totodată, liniar și plan!“

Apoi, Teodor Solonar a adus o carte cu copertă albastră și mi-a întins-o, privindu-mă șugubăț:

— Uite, la pagina 87 ai să găsești teorema care te-ar fi „surmenat“ dacă ai mai fi stăruit să o dezlegi. A căpătat o formă modernă, frumoasă și ușor de înțeles. După cum vezi, cartea a fost compusă la Iași de către un colectiv condus de către binecunoscutul profesor al Universității din Iași și multă vreme rectorul ei, doctor docent Ion Creangă.

Am luat cartea pe care mi-a întins-o prietenul meu. Avea ca titlu: „Introducere în teoria numerelor“ și la pagina indicată am găsit teorema cu numărul 5.3 : „Condiția necesară și suficientă ca un număr natural par n să fie perfect este ca n să fie de forma:

$$n = 2^t(2^{t+1} - 1) = 2^t \cdot p,$$

unde t este un număr natural, iar p este număr prim“. Nu-mi venea să cred că-i aceeași teoremă cu cea din *Elemente* și de aceea doream să o compar. Am găsit-o și i-am citit-o prietenului meu: „Dacă oricîte numere începînd cu unitatea se pun pe rînd în proporție dublă pînă ce suma tuturor

devine un număr prim, și dacă suma înmulțită cu ultimul face un număr oarecare, produsul va fi un număr perfect".

— Nu, dragă Teodor, orice ai spune tu, îmi este imposibil să înțeleg ceva din această formulare și îți mărturisesc recunoștință că mi-ai arătat că ea poate fi scrisă așa de frumos și simplu! Îmi place așa de mult, încât te rog să ne oprim aici și să facem câteva încercări ca să stabilim, după acest criteriu, câteva numere perfecte!

— Dar cu numerele prietene ce se mai aude, le-am pus de mămăligă?

— Lasă, nu te mai grozăvi acum și tu, că nu ne mînă nimeni din urmă. Trebuie să vedem, mai întâi, pentru ce valori ale lui t , expresia $(2^{t+1} - 1)$ este un număr prim, nu-i așa? Încerc $t = 1$: Avem: $2^2 - 1 = 3$. Așadar, $t = 1$ verifică și rezultă $n_1 = 2 \cdot 3 = 6$. Deci 6 nu este numai un număr perfect, dar mai este și triunghiular! Observăm că și $t=2$ verifică: $2^3 - 1 = 7$. Prin urmare, acum apare al doilea număr perfect. Care-i oare? Parcă nu îndrăznesc să-l calculez!

— Curaj, că doar nu te așteaptă decît o simplă înmulțire.

— Da: $n_2 = 4 \cdot 7 = 28$. Dar nu-i vorba numai de asta. Să găsesc și divizorii lui 28 și să verific!

— Adică, nu ai încredere în teoremă sau în tine? Ori în amîndouă?

— De ce încerci să te răzbuni? Nu vezi că eu am cedat?

— Ai dreptate, *tu* ai cedat și văd că ai scris divizorii lui 28.

— Da, avem: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Merg mai departe și pun $t = 3$. Am $2^4 - 1 = 15$. Ce rău îmi pare! Formula nu se mai aplică. Să fac $t = 4$: $2^5 - 1 = 31$. Strașnic! 31 este un număr prim, deci, am descoperit al treilea număr perfect. El este $n_3 = 16 \cdot 31 = 496$. Cam mare, totuși lasă-mă să-i aflu divizorii și să fac proba!

— Dacă-ți face plăcere, de ce nu te-aș lăsa? Numai că te-aș sfătui să numerotezi numerele nu cu indicele ce arată succesiunea lor, ci cu indice care arată valoarea lui t . Așa că, în loc de n_3 să pui n_4 . E mai sugestiv și mai interesant, căci tot nu poți număra toate numerele perfecte.

— Asta-i adevărat, bănuiesc că numărul lor este infinit. Avem dar $n_4 = 496$ și scriindu-i divizorii găsim:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.$$

Observi că aceste două numere din urmă nu mai sînt și triunghiulare?

— În schimb sînt rectangulare.

— Nu înseamnă mare lucru, fiindcă toate sînt, după formulă, produs de doi factori. Dar ia să mai vedem ce se întîmplă pentru $t = 5$?

— Potolește-te și păstrează-ți elanul pentru alte probleme care așteaptă să le cinstești cu atenția ta. Ca să nu fii prea necăjit, află că de abia pentru $t = 7$ ai să găsești al patrulea număr perfect care este 8 128.

— Spune-mi cîte numere perfecte au fost cunoscute în Antichitate?

— Numai acestea patru despre care am discutat noi acum. Ele se găsesc amintite în *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, carte scrisă pe la începutul veacului al doilea, după cum mi se pare că ți-am mai spus. Cartea are un nivel științific cu mult inferior cărților VII-IX din *Elementele* lui Euclid, însă ea a avut un mare succes, datorită comentatorilor ei, care la rîndul lor nu au putut face nici atît cît a făcut Nicomah și s-au mărginit să o explice și să mai adauge, ici și colo, informații ce le găseau în alte lucrări.

— Consider că era normal să fie așa, fiindcă Egiptul își pierduse independența de mai bine de un secol, iar faimoasa școală din Alexandria își închisese de mult porțile. Marea epocă de glorie a matematicienilor greci trecuse, iar romanii nu erau amatori de matematici și nici nu au încurajat studiul lor. Trebuie să fim recunoscători acestor comentatori care se străduiau să păstreze o licărire din trecut. Mi se pare că Iamblic, comentînd această lucrare a lui Nicomah, a adus la cunoștință descoperirea numerelor prietene de către pitagoreici.

— Da. Aceasta cu ocazia comentariului său asupra celor 4 numere perfecte pe care le discuta Nicomah. Și cred că are să-ți placă să afli că Nicomah se ocupa de distribuția acestora. El a observat că printre unități este un singur

număr perfect: 6. Tot așa, printre zeci, numai 28 este perfect, printre sute tot un singur număr este perfect și la fel, nu se află decît un singur număr perfect printre cele 1 000 de numere formate din 4 cifre. De aici a dedus că deși în număr infinit, numerele perfecte se îndepărtează mult unele de altele și că ele se termină fie în 6, fie în 8!

— Cînd a fost calculat al cincilea și de către cine?

— De-abia în secolul al XV-lea de către Regiomontanus. Dar el nu se află printre zecile de mii, ci printre zecile de milioane!

— Îl ai poate notat?

— Mă mir că mai întrebi! Uite-l aici, după notația noastră el este: $n_{13}=33\ 550\ 336$. În secolul următor, J. Scheybel, traducătorul lui Euclid din limba germană, a mai găsit două numere perfecte: n_{17} și n_{19} , acesta din urmă avînd 12 cifre, adică fiind de ordinul bilioanelor! Peste alți 100 de ani s-a mai găsit un îndrăgostit de cifre și de perfecțiunea exprimată prin numere, care a adus la lumină al optulea număr: n_{31} . El se află în ordinul pentalioanelor, adică are o suită de 22 de cifre!

— Și care-i numele fericitului calculator?

— Dacă nu te-ar fi înfricoșat așa de tare teorema 36 din cartea a IX-a a lui Euclid, ai fi găsit singur răspunsul în nota de la pagina 249 a volumului II al *Elementelor* traduse de Victor Marian. Iată ce spune el: „Al optulea număr 2 305 843 008 139 952 128 se află la Mersenne...”

— Atunci el l-a calculat?

— Greu de spus! Foarte probabil că da, însă ar fi putut să-l fi calculat și Fermat care îi transmitea multe dintre rezultatele stabilite de el din teoria numerelor, fără să aibă nici un fel de pretenții de autor.

— După cîte știu eu, Marin Mersenne, călugăr sau poate numai frate franciscan din secolul al XVII-lea, era un mare amator de matematici și animator al matematicienilor, pe care-i stimula în descoperirile lor atît prin scrisorile ce le primea și le trimitea, cît și prin corespondența pe care o

dirija între cei interesați de aceleași probleme. Se spune că revoluția științifică din Franța îi datorează mai mult lui decât Universităților ce continuau să-și păstreze caracterul lor scolastic. Thomas Hobbes afirma că prefera chilia lui Mersenne oricărei alte școli de filozofie din Paris și ori de câte ori trecea Canalul, îl vizita pe Mersenne. În chilia lui — locul de întâlnire al savanților din Franța și din străinătate — s-a pus și baza Academiei franceze.

— E adevărat, numai că pe Mersenne l-au interesat, în aceeași măsură, și experiențele de fizică și chimie care începușeră pe atunci să-i preocupe pe oamenii de știință. De aceea, cartea pe care a publicat-o în 1644 la Paris are ca titlu *Cogitata Physico-Mathematica*. Aici se află multe probleme din teoria numerelor, printre care un loc aparte îl ocupă problema numerelor prime. După cum ai văzut, însăși existența numerelor perfecte este condiționată de faptul că numărul $p = 2^{t+1} - 1$ să fie un număr prim. Azi aceste numere poartă numele de „Numerele prime ale lui Mersenne”, fiindcă ele au fost cercetate în această carte. De fapt, Mersenne a stabilit o metodă de a descompune numerele perfecte de această formă în factori primi, pentru diferite valori ale exponentului t . Prin aceasta s-au determinat totodată și valorile lui t , pentru care aceste numere sînt prime. Notîndu-le: $M_t = 2^t - 1$, s-a stabilit că pentru $t < 257$, există numai următoarele 12 valori: $t = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$, pentru care M_t este un număr prim. De pildă, pentru $t = 11$, $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$. Nu este un număr prim, ci se descompune în produsul $23 \cdot 89$. În cartea despre care ți-am vorbit, Mersenne discută și despre numerele perfecte și despre numerele prietene. Între altele, el calculează n_{31} , așadar și M_{31} . Însă, în 1750, Euler a mai calculat odată M_{31} și n_{31} , neștiind că acest calcul a fost făcut cu 100 de ani mai înainte. Într-o lucrare de teoria numerelor, publicată la începutul secolului trecut, contribuția lui Mersenne nici nu mai este amintită.

— Așadar, mai rămîn 4 numere perfecte, ca să se termine seria despre care ai vorbit. Cînd au fost calculate?

— Al nouălea, n_{61} , a fost calculat în secolul trecut, dar ultimele trei au apărut deodată, în 1917. Trebuie să știi că aceste numere sînt gigante și au dat destul de furcă amatorilor.

— Există vreun nume pentru numerele gigante?

— Da, în 1940 Edward Kasner a propus numele de *googol* pentru 10^{100} , acest număr întrecînd se pare numărul probabil al atomilor din Univers. Cu ajutorul ordinatorilor, începînd din anul 1958, s-au putut stabili încă 11 numere prime ale lui Mersenne și anume, pentru următoarele valori ale lui t : $t = 521, 657, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941$ și 11213 .

Ultimul, descoperit în 1964 are 3376 de cifre, adică este mai mare decît un *googol* și, ca să fie imprimat, are nevoie de 12 pagini.

— Atunci numărul perfect care-i corespunde, oare de cîte pagini va fi avînd nevoie?

— Asta nu o mai știi.

— În definitiv, cu aceste informații putem considera problema numerelor perfecte încheiată, nu?

— Nu! Există încă probleme anexe care așteaptă dezlegarea. De pildă:

1) Nu-i nici un motiv și nici nu-i demonstrat că n-ar putea fi numere perfecte nepereche. Sînt, sau nu sînt?

2) Numerele perfecte pot fi obținute numai prin formula lui Euclid?

— Nu ți se pare că dacă s-ar găsi răspuns la prima întrebare, acesta ar răspunde și la cea de a doua?

— Da, în parte, căci după formula lui Euclid, toate numerele perfecte trebuie să fie pare și dacă ar exista un număr perfect impar, atunci el ar trebui să se calculeze în mod obligatoriu prin altă formulă!

— Da, ai dreptate și de aceea, tot în mod obligatoriu propun să ridicăm ședința, că pe ziua de azi ne-ajunge!

A doua zi dimineata, prietenul meu mi-a spus:

— Să-ncepem și noi ca la Televiziune: „Mai aveți o întrebare?”

— Al nouălea, n_{91} , a fost calculat în secolul trecut, dar ultimele trei au apărut deodată, în 1917. Trebuie să știi că aceste numere sînt gigante și au dat destul de furcă amatorilor.

— Există vreun nume pentru numerele gigante?

— Da, în 1940 Edward Kasner a propus numele de *googol* pentru 10^{100} , acest număr întrecînd se pare numărul probabil al atomilor din Univers. Cu ajutorul ordinaatoarelor, începînd din anul 1958, s-au putut stabili încă 11 numere prime ale lui Mersenne și anume, pentru următoarele valori ale lui t : $t = 521, 657, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941$ și 11213 .

Ultimul, descoperit în 1964 are 3376 de cifre, adică este mai mare decît un *googol* și, ca să fie imprimat, are nevoie de 12 pagini.

— Atunci numărul perfect care-i corespunde, oare de cîte pagini va fi avînd nevoie?

— Asta nu o mai știu.

— În definitiv, cu aceste informații putem considera problema numerelor perfecte încheiată, nu?

— Nu! Există încă probleme anexe care așteaptă dezlegarea. De pildă:

1) Nu-i nici un motiv și nici nu-i demonstrat că n-ar putea fi numere perfecte nepereche. Sînt, sau nu sînt?

2) Numerele perfecte pot fi obținute numai prin formula lui Euclid?

— Nu ți se pare că dacă s-ar găsi răspuns la prima întrebare, acesta ar răspunde și la cea de a doua?

— Da, în parte, căci după formula lui Euclid, toate numerele perfecte trebuie să fie pare și dacă ar exista un număr perfect impar, atunci el ar trebui să se calculeze în mod obligatoriu prin altă formulă!

— Da, ai dreptate și de aceea, tot în mod obligatoriu propun să ridicăm ședința, că pe ziua de azi ne-ajunge!

A doua zi dimineața, prietenul meu mi-a spus:

— Să-ncepem și noi ca la Televiziune: „Mai aveți o întrebare?”

— Desigur, i-am răspuns, bucuros că-l văd așa de bine dispus. Aș avea de pus două întrebări:

1) În afară de perechea 220, 248 au mai fost găsite și alte perechi de numere prietene? Când și de către cine?

2) Dacă există, ca în cazul numerelor perfecte, vreo regulă pentru a le calcula?

— Vă rog să vă prezentați!

— Sînt, ca și Paul Valéry, „un nefericit îndrăgostit de cea mai frumoasă dintre științe"! E suficient?

— Da, mulțumesc. Am să răspund, deocamdată parțial, la prima întrebare. Pînă în secolul al XVII-lea nu a fost cunoscută altă pereche de numere prietene. În anul 1636, Fermat a descoperit o nouă pereche, iar doi ani mai tîrziu, Descartes a calculat a treia pereche de numere prietene. La a doua întrebare vă pot informa, tot parțial deocamdată, că în secolul al IX-lea, celebrul matematician și astronom arab, stabilit la Bagdad, pe nume Tabit ibn Korra, adică Tabit feciorul lui Korra, a găsit o formulă care arată cum se pot calcula perechile de numere prietene însă în mod practic nu a calculat o nouă pereche. Mai mult, spre deosebire de cazul numerelor perfecte, pentru determinarea perechilor de numere prietene nu există o formulă generală care să permită calcularea lor, dar există multe formule particulare.

— Acum, pune te rog mîna pe creion ca să-mi explici cum a ajuns Tabit al matale și feciorul nu știi cui la formula sa.

— Prea multe vrei să știi. Eu îți propun să te mulțumești numai cu formula, așa cum a dat-o el, fără nici un fel de explicații, cum era de altminteri și obiceiul. Treaba lui cum a găsit-o, tu folosește-o! „Dacă se pot găsi trei numere p , q , r , toate prime și care să fie de forma:

(1) $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, unde n este un număr natural, mai mare decît unu, atunci perechile (2) $A = 2^n \cdot p \cdot q$ și $B = 2^n r$, sînt numere prietene“.

— Bine, dar văd că formulele acestea permit să stabilești cîte perechi de numere vrei. De ce oare maestrul Tabit nu a făcut-o? Oricum, înainte de a o face eu, vreau să văd ce se întîmplă cu formulele (2) pentru cazul $n = 1$, pe care văd că l-a lăsat de o parte.

Înlocuind în formulele (1) rezultă:

$p = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, $q = 3 - 1 = 2$, $r = 9 \cdot 2 - 1 = 17$, adică 3 numere prime.

Dacă le înlocuiesc în (2) obțin:

$A = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ și $B = 2 \cdot 17 = 34$.

Iată o pereche de numere destul de simpatică, nu-s ele oare prietene?

— Pune-le la încercare și ai să vezi!

— Atunci să stabilim divizorii: $20 = 2^2 \cdot 5$ iar $34 = 2 \cdot 17$. Așadar, $1 + 2 + 17 = 20$. Vezi? Suma divizorilor lui 34 este exact 20!

— Văd, cum să nu văd, mergi mai departe!

— Iaca merg, că n-am să stau în loc: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22$. Deci, 34 încurcă socotelile! Pe lângă factorii lui 20, el ar mai avea loc și pentru alții străini, în timp ce bietul 20 nu admite alți factori decât pe acei ai lui 34! Exact ca între prietenii de care trebuie să se fi lovit un La Rochefoucauld sau Helvetius sau atîția alții ca să scrie despre prietenie cu atîta năduf!

— Te-aș ruga acum să-mi explici de ce regula lui Tabit nu se aplică la cazul $n = 1$. De unde provine anomalia?

— Nu-i nici o anomalie, tu singur nu ai respectat *condiția impusă de regulă* și atîta tot. Găsești că este o anomalie dacă te calcă o mașină, fiindcă nu ai respectat regulile de circulație?

— Atunci să cercetez cazul $n = 2$:

$p = 3 \cdot 4 - 1 = 11$, $q = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, $r = 9 \cdot 2^3 - 1 = 71$.

Toate trei sînt numere prime. Aplicînd formulele (2) găsesc: $A = 4 \cdot 55 = 220$ și $B = 4 \cdot 71 = 284$, perechea știută!

— În timp ce mocoșeai la aceste calcule eu m-am întors în urmă cu vreo mie de ani și l-am căutat pe Tabit ibn Korra. L-am găsit aplecat asupra unui medalion de aur pe care grava numărul 284. Alături de el se afla un altul cu numărul 220, frumos încadrat într-un desen. Se întuneca și fiindcă trebuia să-l termine i-a spus ucenicului să urce în turn și să pregătească instrumentele pentru cercetarea stelelor, că vine și el după ce

isprăvește talismanul. I-a mai amintit că toată atenția trebuie îndreptată spre steluța aceea ce a dispărut aseară așa de repede la orizont, că pe ea ar vrea să o prindă așa cum trebuie. S-ar fi urcat bucuros el singur de pe acum în turn, dar nu putea neglija treaba aceasta, care-i aducea un venit așa de bun. Talismanele erau la modă și cei bogați le plăteau bine. Cu ce câștiga pe ele își întreținea familia, plătea ucenicii și chiar avea cu ce procura câte un manuscris matematic, greu de găsit și scump la preț. De altfel, nu se cuvenea să se plîngă, căci îi și plăcea să încrusteze aceste două numere, împodobindu-le în fel și chip, fiindcă în timp ce lucra, gândurile lui săpau și ele în adîncuri. Așa a aflat că aceste două numere nu aveau nici o taină, ci s-au legat între ele ascultînd de o lege tot așa cum ascultă și stelele de o lege cînd se rotesc zilnic în jurul pămîntului, sau cum ascultă diagonalele unui pătrat de legea ce le poruncește să se taie în părți egale. Știa că ar putea găsi și alte perechi de numere care să asculte de aceeași lege a prieteniei și chiar dorea să le calculeze poate odată, cînd va avea mai mult timp. — oricum acest lucru nu-l va spune nimănui fiindcă ar putea fi acuzat de blasfemie, de ateism sau cine mai știe de ce! Unii oameni cred în puterea acestor două numere de a proteja prietenia și cu ce drept ar veni el să le tulbure credința?

Cînd a tăcut, Teodor Solomonar păstra încă privirea pierdută în gol, iar ochii îi erau umezi, de-abia cînd a observat că-l privesc cu ios, s-a scuturat de gânduri. Atunci i-am zis:

— Da, aici ar fi o explicație a faptului că Tabit nu a mai calculat altă pereche. Dacă aceste numere au trecut din domeniul științei în acela al magiei, era natural să se fi mărginit la perechea știută!

— Asta-i sigur! mi-a răspuns prietenul meu. Uite ce scrie Oystein Ore în cartea sa *Number Theory and its History*:

„În scrierile matematice arabe, numerele prietene apar de mai multe ori. Ele au jucat un rol în magie și astrologie, în stabilirea horoscoapelor, în vrăjitorie, în amestecul poțiunilor de dragoste și în fabricarea talismanelor. Ca o ilustrare vom cita din *Historical Prolegomenon* a învățatului arab Ibn Khaldun (secolul XIV): „*practica artei talismanelor ne-a făcut să recunoaștem minunatele virtuți ale numerelor prietene. Ele*

sînt 220 și 284... Autorul *Ghaia-ei*, alți mari maeștri declară că el au văzut acestea confirmate de experiență".

— Foarte nostim, mai ales că, după cîte știu eu, Ibn Khaldun, tunisian de origine, este recunoscut nu numai ca un istoric celebru, dar și ca un bun cunoscător al științelor de atunci, în scrierile lui existînd multe observații științifice serioase!

— Spui că-i nostim! Ei, atunci află una și mai nostimă, rămasă de la alt arab, astronom și medic vestit, care a trăit pe la începutul veacului al XI-lea la Cordova. Se numește Abulcasis al Madjriti. El afirma că aceste două numere exercitau cu adevărat o influență miraculoasă, pe care a cunoscut-o el însuși, fiindcă a dat cuiva să mănînce numărul 220 în timp ce el a mîncat numărul 284! Păcat că nu ne spune și cum le-a preparat!

— Din cele ce-mi spui, trag concluzia că faima acestor două numere a fost adusă prin scrierile matematice și nematematice arabe, căci atît Nicomah cît și Iamblic păstrează o atitudine științifică în informațiile ce le dau.

— Cred că da. În cărțile de aritmetică tipărite în Europa apuseană prin secolele XV și XVI de către Chuquet, Stiefel, Cardan, Tartaglia, și de alții, apar și aceste numere. Ele sînt date numai drept exemplu în legătură cu proprietatea divizorilor lor, dar în nici una dintre aceste cărți nu se menționează formula lui Tabit ibn Korra și nici proprietățile magice! Și Mersenne, într-o carte, tipărită mai înainte de *Cogitata* cu titlul *Les preludes de L'Harmonie universelle*, le amintește. Astfel se face că, citind cartea, Pierre Fermat, cu pasiunea care o avea pentru problemele din teoria numerelor, nu s-a lăsat pînă ce nu a stabilit legea lor de compunere și nu a găsit încă o pereche! În 1636, la doi ani după ce apăruse cartea lui Mersenne, autorul primește o scrisoare de la Fermat în care îi comunică o a doua pereche de numere prietene, anume:

$$A = 2^4 \cdot 23 \cdot 47 = 17\,296 \text{ și } B = 2^4 \cdot 1151 = 18416.$$

— Exact formula lui Tabit pentru $n = 4$. Ceea ce înseamnă că pentru $n = 3$, p , q și r nu sînt numere prime! A arătat Fermat cum a stabilit aceste numere?

— Atunci nu, dar mai târziu da, și îți voi arăta îndată procedeul lui. Mai înainte însă, aș vrea să te pregătesc sufletește ca să nu ai deziluzii. Trebuie să știi că, pe vremea lui Fermat, și cu atât mai mult în timpul lui Tabit, nu exista formalismul cu care ești azi așa de obișnuit, încât nu-ți închipui cum ar fi putut exista aritmetica fără de el!

— Iartă-mă, dar nu înțeleg ce vrei să spui? Te referi la formulele algebrice?

— Mă refer mai ales la semnele de operație $+$, $-$, $\times$, $:$, $=$ și literele puse în locul cifrelor, cu care să poți nota orice putere a unui număr sub formă exponențială, ca de pildă, la forma în care ți-am scris cu formulele lui Tabit. Nici el și nici Fermat nu le-au scris și deci nici nu le-au gândit așa. Cum a procedat Tabit, nimeni nu mai știe, dar iată cum descrie Fermat calea pe care a urmat-o:

„Se începe cu progresia geometrică: 2, 4, 8, 16,... și dedesubt se pun numerele triple corespunzătoare. Apoi, din fiecare se scade câte 1 și rezultatele se scriu pe rândul de deasupra. În fine, în rândul de jos se scriu numerele obținute prin produsul a două numere consecutive din rândul trei, din care scazi 1:

5	11	23	47	...
2	4	8	16	...
6	12	24	48	...
	71	287	1151	...

Cînd un număr din ultimul rând este prim, ca 71, și la fel cel de deasupra din rândul întâi, ca 11, și cel precedent lui, ca 5, atunci aceste numere conduc la numere prietene. De exemplu, numărul din ultimul rând, 71 și cele din primul rând, 11 și 5, sînt prime. Dacă se înmulțește 71 cu 4 se obține 284 și înmulțind 5 cu 11 și cu 4 obținem 220. La fel, $1151 \cdot 2^4 = 18416$ și $23 \cdot 47 \cdot 2^2 = 17296$.

— Oare ce-ar fi zis Fermat dacă i s-ar fi arătat formulele pe care le-am scris noi, aici?

— Nu cred că l-ar fi încîntat ca pe noi. Aceste formule i s-ar fi părut, poate, mai greoaie decît metoda folosită de el, fiindcă era deprins să gîndească după tiparul lui de



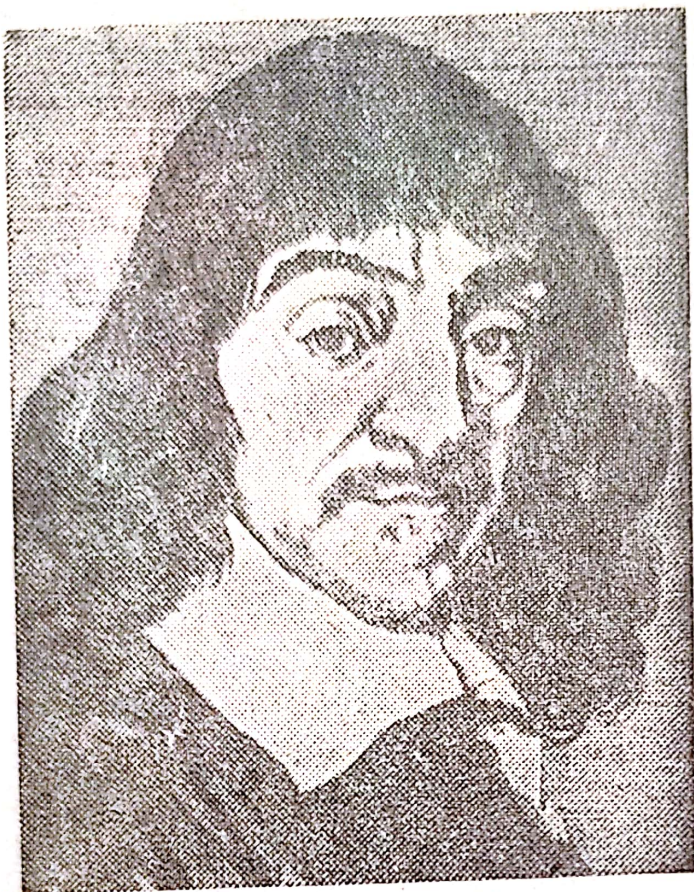
atunci și ar fi avut nevoie de adaptare ca să treacă la al nostru. Ți-am povestit cândva cazul lui Huygens. Deși prieten cu Leibniz, el nu s-a putut adapta la condițiile noi ale analizei infinitezimale și a continuat să gândească și să creeze, așa cum se obișnuise, deși concepțiile noi l-au interesat și nu i-au rămas străine.

— Mi-ai spus că, doi ani mai târziu, Descartes a descoperit și el o nouă pereche de numere prietene. Cred că cel puțin el a stabilit formulele lui Tabit, fiindcă știu că el a dat algebrei forma modernă și a folosit notația exponențială.

— Iată că nu! Printre scrisorile prin care-i comunică lui Mersenne numerele prietene găsite de el, se află una în care arată că-i uimit de faptul că Fermat a folosit exact același procedeu care l-a condus și pe el la numerele

$$A = 2^7 \cdot 191 \cdot 383 = 9\,363\,584 \text{ și } B = 2^7 \cdot 73727 = 9\,437\,056.$$

În anul 1644, când Mersenne a publicat *Cogitata*, el a adus la cunoștința publicului aceste două perechi noi de numere prietene, fără a arăta cum au fost descoperite.



— Spui că Mersenne a tipărit cartea sa în 1644, dar Fermat făcuse descoperirea cu 8 ani mai devreme, iar Descartes cu 6...

— Și ce-i cu asta? Judeci după *azi* și nu după *atunci*! În secolul al XVII-lea, opt, zece și chiar douăzeci de ani nu aveau lungimea celor de azi!

— Poate că ai dreptate. Îmi vin în minte diferite exemple care mă fac să nu mai insist. Revenind la problema noastră, aș vrea să observ că dacă numerele stabilite de Descartes sînt de ordinul milioanei și corespund la valoarea $n = 7$ din formula lui Tabit, ar urma că perechea următoare se va afla undeva printre bilioane sau trilioane?

— Îmi pare rău că iar trebuie să-ți spun *nu*! Prin această formulă nu s-au mai putut găsi alte perechi de numere prietene pentru nici o valoare a lui $n < 200$!

— Atunci s-a isprăvit cu ele? Așadar, printre numere sînt mai puține exemple de prietenii decît printre oameni?

— S-ar putea să nu te grăbești? De unde ai scos tu că formula lui Tabit ar fi fiind singura cale către numerele prietene? Oare

îți închipui că Euler, despre care Arago spunea că „el calculează așa cum oamenii respiră și vulturii planează în vînt”, a lăsat să treacă pe lîngă el o asemenea nadă fără să se prindă în ea? Dintr-o răsufare el a dat la iveală 30 de perechi de numere prietene!

— Asta-i prea de tot! Nu glumești? Chiar 30 de perechi noi-nouțe de numere prietene? Și a arătat cum a procedat?

— Atunci, în 1747 cînd a publicat articolul intitulat *Despre numerele prietene*, s-a mărginit să amintească cele trei perechi cunoscute și a adăugat perechile calculate de el, dintre care prima este: $A = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$, $B = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$, iar ultima $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$, $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$. Peste trei ani a scris o broșură cu același titlu, în care a stabilit teoria numerelor prietene, dar această lucrare a rămas în manuscris și nu s-a găsit decît după moartea lui, atunci cînd au fost cercetate lucrările sale postume, pentru a fi publicată întreaga operă a lui Euler. Broșura a apărut în volumul I din opere complete *Commentationes Arithmeticae*, în 1915. Acolo, la pagina 86, am găsit și am citit această lucrare a lui Euler și am constatat atunci că Euler era cam slab la istoria matematicilor, deși știa *Odissea* și *Eneida* pe de rost!

— Îmi închipui satisfacția ta. Hai povestește-mi ce cusur i-ai găsit marelui Euler?

— Cusur? Nu pot pronunța acest cuvînt cînd vorbesc de Euler, el rămîne pentru mine un zeu și zeii nu au cusururi. Ei pot însă rămîne indiferenți față de datele istoriei pe care oamenii de rînd o cercetează cu migală. Astfel, am găsit că Euler credea că M. Stiefel era acela care a prezentat numerele prietene pentru prima oară. El scrie că perechea 220, 284 se află în *Aritmetica integra* publicată de acesta la Nüremberg în 1544. Așadar, nici tu Pitagora, nici tu Iamblic, nici tu Fermat! Singur Descartes este amintit ca autor al ultimei din cele trei perechi. Despre Tabit ibn Korra nici nu aș fi avut pretenția să-l pomenească, fiindcă lucrările lui au fost cercetate și discutate abia în secolul al XIX-lea, dar despre Pitagora și Fermat — de! — ar fi fost cazul.



— Ei, acum după ce ți-ai vărsat năduful, aștept să-mi arăți metoda stabilită de Euler, dacă este destul de simplă ca să o pot înțelege și eu.

— În privința asta, ca să-ți fac plăcere, te pot încredința că ai fi fost și tu în stare să o descoperi, dacă ai fi dorit-o cu adevărat!

— Lasă ironiile și treci la fapte!

— Nu voi urma chiar metoda lui Euler, fiindcă atunci s-ar întâmpla ca și cu teorema a 36-a a lui Euclid. De aceea voi folosi prelucrarea lui Escott, din articolul despre care ți-am vorbit. El ne va călăuzi, de aici înainte, în tot ce vei afla despre numerele prietene. Acest articol l-am tradus și se află în întregime în caietul de pe masă. Așadar, să luăm creioane și hârtie și să începem, notînd, cum o face Escott, cu m și n cele două numere prietene și cu $S(m)$ și $S(n)$ suma tuturor divizorilor lor, între care este inclus și numărul însuși. În acest caz, scăzînd numărul însuși, proprietatea numerelor prietene se exprimă prin formulele: (1) $S(m) - m = n$ și $S(n) - n = m$. De aici rezultă relația: (2) $S(m) = S(n)$.

— Ia stai mata oleacă! Dacă $m = n$, oare relația (1) nu dă tocmai condiția ca un număr să fie perfect?

— Da! Faptul a fost remarcat și de Euler numai că practic aceasta nu poate ajuta la nimic. Problema care se pune este să exprimi numerele m și n cu ajutorul factorilor primi din care sînt formați.

— Vezi, aici este ceea ce deosebește omul de rînd de geniu! Probabil că Euler a găsit răspunsul cel bun.

— Sigur că da! El a considerat că unul, sau mai mulți, dintre factorii care formează cele două numere, poate fi același și l-a notat cu E , iar ceilalți factori, care neapărat trebuie să fie primi și să se deosebească în cele două numere, i-a notat cu $p, q, r, s, t, \dots$. Folosind aceste observații, cu notațiile de mai sus, avem:

$$m = E \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \dots \text{ iar } n = E \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \dots$$

— Nu observi că acest număr E apare și în formula lui Tabit? Anume, în prima pereche $E = 2^2$, în a doua $E = 2^4$ iar în a treia $E = 2^7$. Poate că Euler a observat acest lucru și l-a generalizat! Dar asta nu înseamnă încă nimic, niște notații și atîta tot. Vreau să înțeleg cum se poate trece de la aceste notații la dezlegarea problemei? Aici e geniu!

— Euler a folosit o prea frumoasă teoremă din teoria numerelor, în care se arată că, dacă un număr natural N este compus și are forma $N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \dots \cdot t^f$, atunci suma divizorilor lui este dată de formula:

$$(3) \quad S(N) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{c+1} - 1}{r - 1} \cdot \dots \cdot \frac{t^{f+1} - 1}{t - 1}.$$

— Exact de ceea ce avem nevoie! Îmi dau seama că mi-ai dat cheia în mînă, dar nu văd lacătul!

— Nu te necăji, căci l-a văzut Euler, măcar că ochii lui nu-l mai ajutau. Astfel, el a ales numerele N , care să formeze perechile prietene în așa fel ca formulele (3) să apară în forme simple, ușor de mînuit. Aceste forme le-a grupat în următoarele

cinci moduri, pe care le vom nota folosind notațiile convenite:

1. $m = E \cdot p \cdot q$; $n = E \cdot r$ sau notate împreună: E_r^{pq} .
2. $m = E \cdot p \cdot q$; $n = E \cdot t \cdot s$ sau notate împreună: E_{ts}^{pq} .
- (T) 3. $m = E \cdot p \cdot q \cdot r$; $n = E \cdot t \cdot s$ sau notate împreună E_{ts}^{pqr} .
4. $m = E \cdot p \cdot q \cdot r$; $n = E \cdot t \cdot s \cdot v$ sau notate împreună E_{tsv}^{pqr} .
5. $m = E \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s$; $n = E \cdot t \cdot u \cdot v$ sau notate împreună: E_{tuv}^{pqrs} .

— Vrei să spui că trebuie să folosim formula (3) ca să punem în evidență suma divizorilor, în fiecare din cele 5 cazuri?

— Exact! Pe E îl considerăm separat, ca un produs și ne referim la ceilalți factori, așadar, în primul caz, avem:

$$S(m) = S(E) \frac{p^2 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = S(E) (p + 1)(q + 1) \text{ și la fel:}$$

$$S(n) = S(E) \frac{r^2 - 1}{r - 1} = S(E) (r + 1).$$

— Aceste valori ale lui m , n , $S(m)$ și $S(n)$ trebuie înlocuite în (1) și (2). Făcând reducerile se ajunge la formulele:

$$(4) \quad S(E)(p + 1)(q + 1) = E(pq + r) \text{ și}$$

$$(5) \quad (p + 1)(q + 1) = r + 1.$$

— Am dat peste un sistem de 2 ecuații cu trei necunoscute, care se cere rezolvat în numere întregi, prime, diferite între ele și să nu fie divizibile cu E . Am putea elimina una dintre necunoscute, de pildă pe r , $r = pq + p + q$, a cărui valoare apare ușor din (5). Înlocuind în (4) ne rămîne ecuația:

$$(6) \quad S(E)(p + 1)(q + 1) = E(2pq + p + q).$$

— Interesant, numai că mă uit cu teamă la această ecuație! Mai întâi pentru că acest $S(E)$ mă îngheață, nu alta!

— Dar el e cel mai simpatic. Ai voie să-l alegi cum vrei tu. De pildă, Euler l-a ales pe E de forma $E = 2^u$ și, prin urmare, din (3) rezultă $S(E) = 2^{u-1} - 1$.

— Vezi, la asta nu m-am gândit, dar acum când mi-ai arătat, totul pare așa de simplu! Atunci să înlocuiesc în (6) și să fac reducerile:

$$(7) \quad 2^{u+1} - 1 = pq - (2^u - 1)(p + q).$$

— Ai lucrat bine, dar acum e nevoie să intervin eu, fiindcă am citit lucrarea mai înainte și nu fiindcă m-aș pricepe mai bine. Ecuația (7) se poate transforma în alta, mai ușor de rezolvat. Pentru aceasta vom opera asupra lui $2^{u+1} = 2 \cdot 2^u$ care sugerează că ar putea fi considerat drept termenul din mijloc al binomului $(2^u - 1)$ din membrul al doilea. E de ajuns să adunăm și să scădem pe 2^{2u} . Astfel avem:

$$2^{2u} - (2^u - 1)^2 = pq - (2^u - 1)(p + q).$$

— Acum știu cum procedez mai departe. Trec binomul la pătrat în membrul al doilea și scot factor comun pe $2^u - 1$!

— Nu-i chiar așa de simplu, fiindcă tot acolo mai ai și produsul pq care-ți rămâne stingher, ori tu trebuie să ajungi să ai și în membrul al doilea un produs de doi factori. Numai atunci ecuația se poate descompune.

— Atunci ce să fac?

— Treci pătratul, așa cum ai spus, în membrul al doilea, dar totodată faci și înmulțirile cu p și q , adică:

$$2^{2u} = (2^u - 1)^2 - (2^u - 1)p - (2^u - 1)q + pq.$$

— Parcă aș îndrăzni să duc calculele mai departe: se pare că, grupînd, pe de o parte, primii doi factori și apoi ultimii doi, se alege un factor comun. Uite cum procedez:

$$2^{2u} = - (2^u - 1)(p - (2^u - 1)) + q(p - (2^u - 1)) \text{ și de aici:}$$

$$2^{2u} = (p - (2^u - 1))(q - (2^u - 1)) \text{ și deci (7) apare ca un produs!}$$

— E adevărat, dar ecuația aceasta trebuie să o mai pieptănăm oleacă. Punem: $2u = u - k + u + k$, de unde 2^{2u} se transformă în $2^{u-k} \cdot 2^{u+k}$ și deci, descompusă în factori, ecuația (7) se poate scrie:

(8) $2^{u-h} = p - (2^u - 1)$ și $2^{u+h} = q - (2^u - 1)$, iar de aici rezultă:

$$(9) \quad p = 2^{u-h} + 2^u - 1 = 2^{u-h} (2^h + 1) - 1 \quad \text{și} \\ q = 2^{u+h} + 2^u - 1 = 2^u (2^h + 1) - 1.$$

Deducem valoarea lui r :

$$r = 2^{2u-h} (2^h + 1)^2 - 1.$$

Așadar, problema este rezolvată, cel puțin în principiu. Dacă p , q , r sînt numere prime, atunci condiția (I) din (T) conduce la numere prietene de forma:

$$(10) \quad m = 2^u \cdot p \cdot q \quad \text{iar} \quad n = 2^u \cdot r.$$

Euler a observat că, pentru $h = 1$, formulele (9) devin:

$$p = 3 \cdot 2^{u-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^u - 1 \quad \text{și} \quad r = 9 \cdot 2^{2u-1} - 1.$$

Dar acestea sînt tocmai formulele lui Tabit ibn Korra!

— Adevărat, însă formulele găsite de Euler sînt cu mult mai generale și din ele se pot deduce și alte perechi de numere prietene. Chiar și în acest prim caz, din (T), Euler nu s-a mărginit numai la factorul E de forma 2^u , ci a considerat și cazul $E = 2^u \cdot f$, unde $f = 2^{n+1} + e$ este un număr prim. Refăcînd calculele pe care le-am stabilit noi, el a găsit perechea: $m = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ și $n = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$ sau, într-o formă concen-

trată: $2^2 \cdot 23 \cdot \begin{Bmatrix} 5 \cdot 137 \\ 827 \end{Bmatrix}$ pe care am scris-o la un loc. O altă pereche, care se încadrează în aceeași formulă, a fost calculată pentru $E = 2^u (g - 1) (h - 1)$, ultimii doi factori fiind primi.

Astfel, Euler a mai descoperit perechea: $2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \begin{Bmatrix} 389 \cdot 509 \\ 198 \cdot 899 \end{Bmatrix}$.

Acum cred că ai înțeles cum se procedează și atunci cînd ar fi de stabilit perechile de numere prietene care corespund formelor 2, 3, 4 și 5 din tabloul (T).

— De înțeles am înțeles, dar cînd mă gîndesc la ce fel de calcule trebuie să faci față... fiindcă de fiecare dată numărul necunoscutelor se mărește cu cîte o unitate, iar ecuațiile ce rezultă trebuie să fie mult mai complicate.

— Asta-i așa, dar tocmai aici e farmecul. Dealtfel, mi se pare că am uitat să-ți spun că, în ultima lui lucrare, Euler a

mai adăugat alte 31 de perechi de numere prietene la cele 30 calculate anterior. Dintre acestea numai 29 au fost găsite mai târziu valabile, așa că Euler are la activul său 59 de perechi de numere prietene. În articolul lui Escott se găsește următorul tablou, în care sînt înscrise, în ordine cronologică, numele descoperitorilor, numărul perechilor de numere prietene și, cu aproximație, anul decoperirilor pînă în 1943. Uite îl am aici și ai să vezi din el multe lucruri interesante:

Pitagora	1	(540 î.e.n.)
Fermat	1	(1636)
Descartes	1	(1638)
Euler	59	(1747—50)
Legendre	1	(1830)
B.N.I. Paganini	1	(1867)
P. Seelhoff	2	(1884)
L.E. Dickson	2	(1911)
T.E. Mason	14	(1921)
P. Poulet	65	(1929)
A. Gerardin	5	(1929)
E.B. Escott	233	(1934)
B.H. Brown	1	(1939)
Poulet și Gerardin	4	(1929)

Total 390

— Așadar, autorul articolului a calculat 233 de perechi. Acesta zic și eu că-i record, bădie Teodor!

— Dar să nu uităm contribuția mașinilor de calcul. De altfel, Escott face și următoarea observație: pînă la începutul secolului al XX-lea au fost găsite 66 de perechi, celelalte 324 de perechi sînt calculate în secolul nostru și cele mai multe după 1921. Tot în acest articol se găsesc perechile de numere prietene, grupate după formulele care le caracterizează. Un rezultat îl ai aici în față:

După formula E_1^{pq} : 33 de perechi. Aici, alături de primele trei se află 13 perechi calculate de Euler, din care:

$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \begin{cases} 41 \cdot 461 \\ 19403 \end{cases} \text{ sau } 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 211 \\ 2543 \end{cases}$$

alte 10 calculate de Escott, dintre care am ales iar două:

$$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 107 \cdot \begin{cases} 3209 \cdot 4492 \\ 14425739 \end{cases} \text{ și } 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 271 \cdot \begin{cases} 179 \cdot 5419 \\ 975599 \end{cases},$$

iar restul de diverși autori, printre care am ales perechea găsită de Legendre în 1830: $2^8 \cdot \begin{cases} 257 \cdot 33023 \\ 8520191 \end{cases}$, în cinstirea faptului că

Teoria numerelor numără printre cărțile ei fundamentale tratatul său, publicat la Paris, în 1797, sub titlul *Essai sur la théorie des nombres*.

După formula E_s^{pqr} : 7 perechi, toate ale lui Escott. Iată una:

$$2^4 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 167 \cdot 709 \\ 2\,147\,039 \end{cases}.$$

După formula E_{rs}^{pq} : 101 de perechi, dintre care Euler are 27. Am ales pe cele mai simple:

$$2^2 \cdot \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases} \text{ și } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 71 \\ 17 \cdot 31 \end{cases}.$$

Escott a calculat 35; iată prima și ultima din seria lui:

$$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \begin{cases} 52 \cdot 1\,759 \\ 59 \cdot 1\,583 \end{cases} \text{ și } 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 3\,229 \cdot \begin{cases} 53 \cdot 774\,959 \\ 179 \cdot 232\,487 \end{cases}.$$

Celelalte aparțin autorilor pe care i-ai văzut în primul tablou. După formula E_{st}^{pqr} : 294 de perechi. Euler a calculat 17 perechi, din care:

$$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 7 \cdot 60\,659 \end{cases} \text{ sau } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 23 \cdot 397 \\ 7 \cdot 21\,491 \end{cases}.$$

Poulet a stabilit 27 de perechi. În afară de două, în care $E = 2 \cdot 7 \cdot 11$, toate celelalte au $E = 2^4$. Iată, de pildă, o pereche:

$$2^4 \cdot \begin{cases} 59 \cdot 359 \cdot 683 \\ 23 \cdot 615\,599 \end{cases}.$$

Escott deține majoritatea, cu 140 de perechi, începînd cu

$$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 11 \cdot 11\,369 \\ 757 \cdot 1\,439 \end{cases} \text{ și terminînd cu:}$$

$$3^{10} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3\,851 \cdot \begin{cases} 61\,559 \cdot 565\,247 \\ 359 \cdot 911 \cdot 105\,983 \end{cases}.$$

După formula E_{stu}^{pqr} : Euler a calculat o singură pereche:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 59 \cdot 179 \\ 17 \cdot 19 \cdot 359 \end{cases}$$

Iar Escott 21, așadar, în total 22 de perechi. Iată și o pereche stabilită de Escott: $3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1\,093 \cdot \begin{cases} 19 \cdot 4\,643 \cdot 35\,831 \\ 29 \cdot 47 \cdot 2\,311\,163 \end{cases}$

— Frumusele numere, ce spui mata, bădie? Știu bine că nu te-ai fi încumetat să le scrii cu atîta îngrijire, dacă nu ți-ar fi mîngîiat sufletul! Tac și ridici din sprînceană! Bine, spune mai departe.

— Iaca spun! După formula E_{uv}^{pqrs} : Escott singur a calculat 14 perechi, toate avînd ca factor comun pe 2^3 . Iată o mostră:

$$2^3 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 264\,599 \\ 37\,799 \cdot 201\,599 \end{cases}$$

După formula E_{uv}^{pqrs} : numai Mason a calculat două perechi, anume:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases} \text{ și } 3^3 \cdot 5^3 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases}$$

Au mai rămas 17 perechi care nu pot fi încadrate în grupele stabilite teoretic de Euler. Printre acestea se află și perechea pe care a găsit-o Paganini la vîrsta de 16 ani, fără a arăta metoda:

$$A = 2^5 \cdot 37; \quad B = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

sau două perechi ale lui Euler: $A = 2^3 \cdot 19 \cdot 41$; $B = 2^5 \cdot 199$ și $A = 2^3 \cdot 41 \cdot 467$; $B = 2^5 \cdot 19 \cdot 233$, șase perechi ale lui Escott dintre care iată o nostimă uriașă:

$A = 2^3 \cdot 13 \cdot 157 \cdot 3277869$ și $B = 2^5 \cdot 14\,051 \cdot 130\,349$. Dintre acestea mi-a plăcut, cel mai mult, această simplă și drăguță pereche a lui Brown: $A = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ și $B = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$.

— Cred că prietenul matale, cel cu hîrtiuța, ar zice revoltat: „Ca să vezi cu ce găsesc oamenii să-și bată capul! Eu însă mă întreb ce ar fi simțit Pitagora dacă, prin absurd, l-ar fi străfulgerat gîndul că această inspirație a lui, de a alege două numere ca simbol al prieteniei dintre doi oameni, se va trans-

forma într-o problemă a cărei dezlegare va fi căutată, veacuri de-a rândul, cu râvnă și entuziasm de către cei mai de seamă matematicieni, de atunci și pînă în zilele noastre, fără a fi găsit soluția definitivă?

— La întrebarea ta, prietenul nostru cu hîrtiuța cred că ar răspunde fără ezitare: — De! — parcă degeaba spune proverbul că un nebun aruncă o piatră în apă și zece înțelepți nu pot să o scoată? Iar la observația pe care tu spui că ar fi făcut-o, tot el, dacă ar fi fost de față, aș fi răspuns cam așa: „Istoria matematicilor cunoaște destule probleme care au avut la început un caracter pur teoretic și nimeni nu bănuia, pe cînd le cerceta, că ar putea găsi vreo aplicație practică. Și deodată, un om cu vederi de geniu, găsește că acea problemă teoretică, rezolvată numai dintr-o plăcere și curiozitate științifică, poate fi privită drept modelul ideal al unei probleme practice ce-și căuta, fără să găsească, soluția! Aceste probleme teoretice sînt ca piatra, varul, fierul pe care alții le pregătesc și care așteaptă arhitectul care să le folosească la locul și timpul potrivit. Și dacă vrei, uite, mi-a venit acum în minte un exemplu clasic, acela al secțiunilor conice studiate în antichitate din punct de vedere pur teoretic. Printre alții, Arhimede și Apollonios, — secolul III î.e.n. — le-au îndrăgit într-atîta încît, aceste două genii ale poporului grec, au ajuns să se urască unul pe altul, din gelozie că unul a descoperit și el ceea ce găsise celălalt și a publicat înaintea lui rezultatele! Căci, numele lui Apollonios rămîne legat de acela al conicelor, datorită *Secțiunilor conice* care ne-aurămas de la el. Peste 19 veacuri, cam pe la începutul secolului al XVII-lea, se naște un geniu, cu numele de Kepler, care cunoștea bine matematica greacă și o admira, dar mai cunoștea și astronomie pe care, de asemenea, o admira și deodată, așa, printr-o sclipire genială a înțeleș că măsurătorile pe care le făcuse cu migală timp de ani îndelungați Tycho Brahé, se încadrează exact în ipoteza că drumul Pămîntului în jurul Soarelui are ca model o elipsă, în care Soarele se află în unul dintre focare! Nu-i exclus deci ca, într-o bună zi, cineva să spună, dacă nu cumva a și spus, că perechea de numere prietene poate fi modelul cutărei probleme de natură practică.

Atunci, acel cineva va avea gata calculat tabloul cu perechile de numere din care îi va rămîne să aleagă ce-i va conveni!

— Îmi pare bine că așa i-ai răspunde amicului cu hîrtiuța. În schimb, mi-a venit mie în gînd o întrebare, la care nu știu dacă te vei descurca cu aceeași vervă! Permiți să ți-o pun?

— Nu-s sperios din fire, așa că aștept.

— Asta fiindcă ai adus tu vorba despre modele și geometrie. Vezi, teoria numerelor a putut găsi un model al prieteniei, plastic și sugestiv, geometria în schimb nu prea cred că s-ar putea făli că poate face ceva asemănător, oricît ar fi ei geometrii de intuitivi!

— Spune, într-adevăr crezi aceasta? Ei bine, află că tocmai elipsa, despre care ți-am vorbit adineauri, are și proprietatea de a fi un model pentru prietenie. Un matematician francez, de la începutul secolului nostru, pe nume H. Renaud, scria cam așa: „Elipsa are două focare și orice rază care pornește din unul se reflectă în celălalt, imagine exactă a ceea ce se petrece între două inimi unite prin prietenie sau prin dragoste“. Ai avea, cumva, ceva de obiectat?

PROBLEMA ABSTRAȚIEI ÎN MATEMATICI

sau

O METODĂ DE CERCETARE A UNIVERSULUI

— Dacă n-ar fi ploicica asta, te-aș îndemna să colinzi pădurea, măcar așa de unul singur, mi-a spus prietenul meu, îndată după prânzișor.

— Și nu cumva, fiindcă nu poți face abstracție de ploaie, te simți obligat să-mi vorbești despre abstracția în matematici? — l-am zeflemisit, încercînd să ascund durerea pricinuită de starea sănătății lui.

— De data asta, ai nimerit în plin — mi-a răspuns rîzînd de-a binelea Teodor Solonar. Se vede că mi-ai captat gîndurile, prin cine știe ce minuscul dispozitiv de radio; ascuns undeva printre circumvoluțiunile creierului tău!

— Care va să zică, matale bădie, ți-i a vorbi în bobote?

— Nicidecum! Vorbesc foarte serios!

— Cum să te iau în serios? Aristotel însuși a afirmat că „matematica este știință abstractă *prin excelență*, iar matale ești hotărît să-mi vorbești, taman despre *abstracția în matematici*, nu? Și eu, să te iau în serios? Ce face ea, mă rog, cît îi ziulica de mare decît să abstractizeze? Oare ar putea exista vreo problemă de matematici în care să nu fi intervenit și abstracția?

— Ei, tocmai aici e problema! Nu te-ai întrebat niciodată cum se face că, deși matematica abstractizează, cît îi ziulica de mare, cum zici tu, în atîtea mii de ani, nu și-a terminat treaba și nu a devenit o știință moartă precum latina? De ce, pe zi ce trece, ea întinerește și e mereu mai proaspătă? De pildă, pe la sfîrșitul secolului al XVIII-lea, un mare matematician ca J.L. Lagrange se plîngea, — într-o scrisoare către d'Alembert — că în curînd „mina geometriei va trebui părăsită, dacă nu se vor găsi filoane noi, iar catedrele de geometrie vor deveni tot așa de rare ca și acelea de limbi moarte!

Aceasta la sfârșitul secolului al XVIII-lea, dar la începutul secolului al XIX-lea geometria se înfățișa renăscută din propria ei cenușă și, de atunci, n-a mai dat nici un semn de oboseală!

— Bine, bădiță dragă, dacă mata vrei să privești procesul de abstractizare ca pe un elixir, ca pe un secret al tinereții veșnice, atunci află că de-ai străbate pământul în lung și în lat, n-ai să găsești un alt ascultător mai atent.

— Nu-i nevoie să-mi spui că știu eu cu cine am de-a face! Greu e numai pînă ce te dau pe brazdă! Să știi că de mult doresc să cercetăm amîndoi această problemă, așa pe-ndelete, fiindcă amîndoi cunoaștem cîte o fațetă a ei și numai discutînd am putea orîndui lucrurile așa cum trebuie!

— Atunci, fiindcă-i vorbă serioasă, pot să-ți mărturisesc că și eu tînjeam după ajutorul tău, pe cînd încercam să înnod realitatea de noțiunile abstrase din ea, citind *Metafizica* sau *Analiticele* lui Aristotel. Îmi ziceam însă că tu, care pornești automat de la noțiunile abstracte ca să mergi cu ele mai departe, n-ai să mai zăbovești, să cauți cum s-a ajuns la ele!

— Iată, măi Toa, la ce m-am gîndit — am început eu discuția după cîteva sorbituri de cafea. Fiindcă nu poate exista vreun proces de gîndire logică în care să se evite abstractizarea, hai să pornim chiar de la faptul că abstracția este operația logică *ce se aplică* în orice știință și că, după spusa lui Aristotel, „a abstrage înseamnă a descoperi universul în individual”.

— E bine că ți-ai amintit și de acest aspect al procesului de abstractizare, proces care în realitate se prezintă sub forme destul de variate. Prima formă a fost aceea pe care am remarcat-o la început, *aceea de izolare* a unei calități adică, de a scoate o parte dintr-un întreg. Ea se arată ca rezultat al unei analize și de aceea este denumită *abstracție analitică* sau formală, pe cînd aceasta din urmă apare ca rezultat al *inducției*, este deci o *abstracție generalizatoare* sau de identificare!

— Îmi mai aduc aminte și de faptul că am citit cîndva, în *Dialectica naturii*, această observație a lui Engels: „Empiristul este așa de obișnuit să cerceteze lucrurile în mod expe-

rimental încît și atunci cînd operează cu abstracții se crede în domeniul cunoașterii sensoriale”.

— E adevărat. În orice știință intervine, într-un anumit procent, și procesul de abstractizare, dar în matematici acest procent atinge valoarea maximă, adică „sută la sută”. De aici rezultă, ca o consecință logică, natura ei speculativă, întregul tezaur al matematicienilor fiind compus din raționamentele logice provenite din definirea noțiunilor supuse cîteodată și unor axiome fundamentale. Matematica modernă are însă, tot ca urmare a procesului de abstractizare, și un caracter constructiv. Mai clar decît mine, îți va explica aceasta *Micul dicționar filozofic*¹. Uite-l în raftul al doilea. Te rog, pune-l aici pe masă și citește articolele despre *abstractizare* și *abstracție*.

Am ascultat îndemnul prietenului meu și apoi i-am zis:

— O parte din cele ce am găsit la „abstracție” îmi erau bine cunoscute din lucrările lui Aristotel și ale altora dintre cei ce i-au urmat. De pildă acestea: „în raport cu modalitățile de abstractizare se pot întîlni diferite tipuri de abstracție în știință și în cunoaștere în general; *abstracții empirice*, de exemplu, noțiunile empirice, produse de abstractizarea analitică (numită și conceptuală sau aristotelică), realizată prin abstragerea notelor comune, degajate prin analiza și compararea obiectelor și proceselor concrete, sau a unor alte noțiuni”. Cu alte cuvinte, aceasta face că, printr-o calitate comună și făcîndu-se abstracție de toate celelalte aspecte, pot fi reunite obiecte sau fenomene cu totul diferite între ele. Mi-amintesc iar de un exemplu, dat de Hegel și citat de Engels, în legătură cu cuvîntul abstract *fructe*: „Poți mîncă mere, pere, dar niciodată fructe”!

— Așa? Dar parcă ieri mi-ai spus că te duci la piață ca să cumperi fructe?

— Ai dreptate, dar ți-am adus mere! Așa că nu mă tachina și tu, tocmai cînd am ajuns la ananghie căci, urmărind mai departe articolul despre abstracție am dat peste alt tip de abstracții „*abstracțiile constructive*, de exemplu, noțiunile

¹ *Mic dicționar filozofic*, Ed. II, Editura Politică, București, 1973.

teoretice, obținute prin abstractizarea constructivă sau idealizantă (combinată cu cea analitică)!”

— Și asta te-a speriat?

— Ai ghicit, iar dacă ai să izbutești să mă faci să înțeleg ce vrea să fie abstracția asta constructivă...

— Vom încerca să facem ce-om putea! Te fac numai atent că aici vom da peste probleme delicate asupra structurilor matematice, unde lucrurile se petrec oarecum altfel decât în capitolele care se bazează pe procedeele de abstracție cu care eram deprinși noi, în tinerețele noastre! Acelea s-au cam învechit, după cum ai citit, acum ele poartă și un nume specific: *abstracții empirice* sau *analitice*! Azi accentul se pune pe *abstracțiile constructive* fiindcă, așa cum le arată numele, prin ele se stabilesc construcții noi în domeniul matematicilor, bazate pe posibilitatea de a stabili relații noi, pur formale, furnizate de noua logică a relațiilor.

— Logica relațiilor zici? Atunci încă un termen nou pentru mine și Aristotel!

— N-ai de ce te speria! E pur și simplu denumirea capitolului din logică, în care se analizează, sub formă matematică, proprietățile formale ale relațiilor. Să numim, de exemplu, cu x și cu y cei doi termeni caracteristici ai unei relații date, pe care o notăm cu litera R . Aplicând metodele curente în teoria mulțimilor, structura logică a acestei relații se scrie sub forma $R(x, y)$ sau încă xRy unde x și y păstrează ordinea stabilită de relație, primul termen, x , fiind *antecesorul*, iar cel de al doilea, y , *succesorul*. Ca *domeniu* al relației R se consideră mulțimea elementelor x , iar drept *codomeniu*, mulțimea elementelor y . Logica relațiilor efectuează toate operațiile ce se pot face între elementele x și y ale acestor două mulțimi și analizează proprietățile ce decurg din ele!

— Aha! Acum bănuiesc eu ce-a vrut să spună H. Bergson când scria că: „știința modernă se bazează pe legi, adică pe relații”! În aceste câteva cuvinte el punea în evidență faptul că, spre deosebire de știința antică, ce se baza pe *concepte*, știința modernă caută relațiile ce pot fi stabilite între mărimile variabile. Dar dacă te gîndești mai bine, trebuie să recunoști

că nimic nu-i nou sub Soare! Oare Platon nu a scris și el despre relațiile matematice, sau fizice, sau morale?

— N-am să mă amestec eu acum în revendicările tale de prioritate cu privire la Platon și cred că ai să renunți și tu la ele când îți voi preciza că gîndirea contemporană însăși este relaționistă și asta înseamnă altceva decît clasificare și specificare, înseamnă ceva ce depășește procesul prin care se stabilea raportul dintre individ și specie, sau dintre specie și gen, înseamnă descoperirea relațiilor, din ce în ce mai complexe, dintre elementele în cauză. Logica relațiilor, adică a predicatelor, se opune logicii clasice, a subiectelor. De aceea, ceea ce se înțelege azi prin *gîndire abstractă* este altceva decît ceea ce consideram noi pe vremuri, fiindcă nu mai este gîndirea inductivă bazată pe procedeele de *abstracție empirică sau analitică*!

— Se poate, dar nu-mi închipui că această *abstracție constructivă* a căzut din cer. Sînt convins că și aceasta s-a dezvoltat bazîndu-se pe rezultatele obținute prin vechile procedee! De la acelea aș vrea eu să pornim, ca să-mi arăți cum s-au decantat noțiunile abstracte cu care, aidoma unor cărămizi, s-a zidit în timp de multe, multe milenii, clădirea aceasta minunată ce poartă numele de MATEMATICĂ.

— Doar nu-mi vei cere să stabilesc cîte observații ale strămoșilor, cîte constatări sau deprinderi, transmise din generație în generație prin ereditate, au contribuit ca să se ajungă la noțiunea de număr, de formă geometrică, de măsură a unei lungimi, a unei arii sau a unui volum?

— Ba da! Dacă facem o treabă, atunci să o facem cumsecade! Coboară-mă, te rog, cu ascensorul veacurilor, pînă la treapta cea mai de jos posibil, pînă la aceea pe care a atins-o și poetul nostru drag, prin versurile:

„Îți ridicase și capul de jos, chemat de Soare

Și începu îndată și cugetul să-ți zboare“.

De acolo, vreau să urc alături de tine, *per pedes apostolorum*, atît cît mă vor ține picioarele! Spun așa, fiindcă, după cum vezi, capul stă bine pe umeri! Cam la ce adîncime bănuiești că am putea da peste cel ce a avut întîia oară intuiția spațiului?

— Visezi ca un poet, întrebi ca un poet și ai pretenția să-ți răspund ca un om de știință? Imposibil! Un milion de ani înseamnă 10 000 de veacuri sau 1 000 de milenii, iar zilele trecute am citit că un antropolog american a descoperit în Etiopia oseminte omenești pietrificate de acum vreo trei milioane de ani. Or, *intuiția spațială*, ca și aceea de *număr* sau mai bine zis de *multime*, a străfulgerat mintea omului mai înainte ca el să-și fi ridicat „capul de jos, chemat de Soare“, fiindcă aceste noțiuni nu le are numai omul, ci și animalul. Probabil că s-au format datorită faptului că atât omul cât și animalul se mișcau, din loc în loc, cu o anumită viteză, și așa au avut posibilitatea să distingă obiectele din jurul lor, să deosebească linia dreaptă de cea curbă și să aprecieze distanța ce separă două obiecte.

— Asta se poate fiindcă nu numai omul, dar și animalele ce se orientează prin văz, merg în linie dreaptă. Dealtfel, cred că, dintre toate simțurile, vederea a fost aceea care a avut rolul principal în dezvoltarea noțiunilor matematice, ca aceea de spațiu.

— Știu eu dacă numai vederea? Bubuitul tunetului, foșnetul frunzelor sau susurul unui izvor, adică auzul, ori pipăitul crengilor pe care trebuia să le atingă când le rupea, să nu fi avut nici un rol la fixarea intuiției spațiale? În introducerea la *Cursul de geometrie proiectivă*, publicat de Federigo Enriques în 1930, autorul insistă asupra faptului că pot fi deosebite două categorii de proprietăți geometrice și anume: *proprietăți grafice*, legate de noțiunea de dreaptă, de plan, de concurența dreptelor etc. și *proprietăți metrice*, când apare noțiunea de distanță sau de mărime a unghiurilor etc. Enriques presupune că aceste două categorii de proprietăți geometrice provin din două forme deosebite ale intuiției spațiale pe care omul le-a câștigat în cursul experiențelor lui ancestrale, *intuiția grafică* fiind rezultatul senzațiilor vizuale, iar *intuiția metrică*, a senzațiilor tactile sau musculare. Târziu, spune el, aceste două forme distincte de intuiție geometrică s-au contopit în una singură, aceea de *intuiție spațială*.

— S-ar putea ca și *principiul necontradicției* să fi apărut tot pe atunci.

— Visezi ca un poet, întrebi ca un poet și ai pretenția să-ți răspund ca un om de știință? Imposibil! Un milion de ani înseamnă 10 000 de veacuri sau 1 000 de milenii, iar zilele trecute am citit că un antropolog american a descoperit în Etiopia oseminte omenești pietrificate de acum vreo trei milioane de ani. Or, *intuiția spațială*, ca și aceea de *număr* sau mai bine zis de *multime*, a străfulgerat mintea omului mai înainte ca el să-și fi ridicat „capul de jos, chemat de Soare”, fiindcă aceste noțiuni nu le are numai omul, ci și animalul. Probabil că s-au format datorită faptului că atât omul cât și animalul se mișcau, din loc în loc, cu o anumită viteză, și așa au avut posibilitatea să distingă obiectele din jurul lor, să deosebească linia dreaptă de cea curbă și să aprecieze distanța ce separă două obiecte.

— Asta se poate fiindcă nu numai omul, dar și animalele ce se orientează prin văz, merg în linie dreaptă. Dealtfel, cred că, dintre toate simțurile, vederea a fost aceea care a avut rolul principal în dezvoltarea noțiunilor matematice, ca aceea de spațiu.

— Știu eu dacă numai vederea? Bubuitul tunetului, foșnetul frunzelor sau susurul unui izvor, adică auzul, ori pipăitul crengilor pe care trebuia să le atingă când le rupea, să nu fi avut nici un rol la fixarea intuiției spațiale? În introducerea la *Cursul de geometrie proiectivă*, publicat de Federigo Enriques în 1930, autorul insistă asupra faptului că pot fi deosebite două categorii de proprietăți geometrice și anume: *proprietăți grafice*, legate de noțiunea de dreaptă, de plan, de concurența dreptelor etc. și *proprietăți metrice*, când apare noțiunea de distanță sau de mărime a unghiurilor etc. Enriques presupune că aceste două categorii de proprietăți geometrice provin din două forme deosebite ale intuiției spațiale pe care omul le-a câștigat în cursul experiențelor lui ancestrale, *intuiția grafică* fiind rezultatul senzațiilor vizuale, iar *intuiția metrică*, a senzațiilor tactile sau musculare. Târziu, spune el, aceste două forme distincte de intuiție geometrică s-au contopit în una singură, aceea de *intuiție spațială*.

— S-ar putea ca și *principiul necontradicției* să fi apărut tot pe atunci.

că nimic nu-i nou sub Soare! Oare Platon nu a scris și el despre relațiile matematice, sau fizice, sau morale?

— N-am să mă amestec eu acum în revendicările tale de prioritate cu privire la Platon și cred că ai să renunți și tu la ele când îți voi preciza că gândirea contemporană însăși este relaționistă și asta înseamnă altceva decât clasificare și specificare, înseamnă ceva ce depășește procesul prin care se stabilea raportul dintre individ și specie, sau dintre specie și gen, înseamnă descoperirea relațiilor, din ce în ce mai complexe, dintre elementele în cauză. Logica relațiilor, adică a predicatelor, se opune logicii clasice, a subiectelor. De aceea, ceea ce se înțelege azi prin *gândire abstractă* este altceva decât ceea ce consideram noi pe vremuri, fiindcă nu mai este gândirea inductivă bazată pe procedeele de *abstracție empirică sau analitică*!

— Se poate, dar nu-mi închipui că această *abstracție constructivă* a căzut din cer. Sînt convins că și aceasta s-a dezvoltat bazîndu-se pe rezultatele obținute prin vechile procedee! De la acelea aș vrea eu să pornim, ca să-mi arăți cum s-au decantat noțiunile abstracte cu care, aidoma unor cărămizi, s-a zidit în timp de multe, multe milenii, clădirea aceasta minunată ce poartă numele de MATEMATICĂ.

— Doar nu-mi vei cere să stabilesc cîte observații ale strămoșilor, cîte constatări sau deprinderi, transmise din generație în generație prin ereditate, au contribuit ca să se ajungă la noțiunea de număr, de formă geometrică, de măsură a unei lungimi, a unei arii sau a unui volum?

— Ba da! Dacă facem o treabă, atunci să o facem cumsecade! Coboară-mă, te rog, cu ascensorul veacurilor, pînă la treapta cea mai de jos posibil, pînă la aceea pe care a atins-o și poetul nostru drag, prin versurile:

„Îți ridicase și capul de jos, chemat de Soare

Și începu îndată și cugetul să-ți zboare“.

De acolo, vreau să urc alături de tine, *per pedes apostolorum*, atît cît mă vor ține picioarele! Spun așa, fiindcă, după cum vezi, capul stă bine pe umeri! Cam la ce adîncime bănuiești că am putea da peste cel ce a avut întîia oară intuiția spațiului?

— Visezi ca un poet, întrebi ca un poet și ai pretenția să-ți răspund ca un om de știință? Imposibil! Un milion de ani înseamnă 10 000 de veacuri sau 1 000 de milenii, iar zilele trecute am citit că un antropolog american a descoperit în Etiopia oseminte omenеști pietrificate de acum vreo trei milioane de ani. Or, *intuiția spațială*, ca și aceea de *număr* sau mai bine zis de *mulțime*, a străfulgerat mintea omului mai înainte ca el să-și fi ridicat „capul de jos, chemat de Soare”, fiindcă aceste noțiuni nu le are numai omul, ci și animalul. Probabil că s-au format datorită faptului că atât omul cît și animalul se mișcau, din loc în loc, cu o anumită viteză, și așa au avut posibilitatea să distingă obiectele din jurul lor, să deosebească linia dreaptă de cea curbă și să aprecieze distanța ce separă două obiecte.

— Asta se poate fiindcă nu numai omul, dar și animalele ce se orientează prin văz, merg în linie dreaptă. Dealtfel, cred că, dintre toate simțurile, vederea a fost aceea care a avut rolul principal în dezvoltarea noțiunilor matematice, ca aceea de spațiu.

— Știu eu dacă numai vederea? Bubuitul tunetului, foșnetul frunzelor sau susurul unui izvor, adică auzul, ori pipăitul crengilor pe care trebuia să le atingă cînd le rupea, să nu fi avut nici un rol la fixarea intuiției spațiale? În introducerea la *Cursul de geometrie proiectivă*, publicat de Federigo Enriques în 1930, autorul insistă asupra faptului că pot fi deosebite două categorii de proprietăți geometrice și anume: *proprietăți grafice*, legate de noțiunea de dreaptă, de plan, de concurența dreptelor etc. și *proprietăți metrice*, cînd apare noțiunea de distanță sau de mărime a unghiurilor etc. Enriques presupune că aceste două categorii de proprietăți geometrice provin din două forme deosebite ale intuiției spațiale pe care omul le-a cîștigat în cursul experiențelor lui ancestrale, *intuiția grafică* fiind rezultatul senzațiilor vizuale, iar *intuiția metrică*, a senzațiilor tactile sau musculare. Tîrziu, spune el, aceste două forme distincte de intuiție geometrică s-au contopit în una singură, aceea de *intuiție spațială*.

— S-ar putea ca și *principiul necontradicției* să fi apărut tot pe atunci.

— E mai mult ca sigur că așa a fost! Repetînd anumite acțiuni, omul a observat că ele aveau același rezultat și aceasta îi plăcea, îl mulțumea, creînd în el un anumit sentiment de siguranță față de acțiunile ce nu-i făceau vreun rău și nu se contraziceau între ele.

— După cîte văd ne apropiem de prima treaptă. Aștept să facem acest pas spunîndu-mi cum a ajuns omul de la aceste acțiuni la noțiunile matematice de care s-a ajutat ca să-și rezolve, în mod practic, problemele ce-l preocupau: construirea locuințelor, măsurarea ogoarelor, cîntărirea?

— Degeaba aștepți acest răspuns, căci nimeni nu-l mai poate da! Din cele mai vechi scrieri care ne-au rămas, papyrusurile egiptene și cărămizile babiloniene, se constată că omul *știa* să calculeze și arii, și volume, și de cîtă hrană ar avea nevoie o echipă de oameni plecată la armată sau ca să facă o anumită construcție, dar *în nici una dintre aceste scrieri* nu se aminteste *cînd* și *cum* s-a declanșat în mintea omului *noțiunea abstractă* de măsură, *de tangenta unui unghi sau pantă*, cum îi mai zicem azi, noțiune cu care egiptenii jonglau, fiindu-le necesară la tăierea pietrelor cu care au acoperit piramidele într-un chip așa de perfect, că totul apărea ca o uriașă față plană! Sau, cum au ajuns babilonienii la concepția abstractă a calculului algebric? Enigmele acestea rămîn enigme și te rog să nu-ți faci iluzia că urcușul nostru din preistorie se poate face pe trepte luminate cu neon! Să fii bucuros dacă, din cînd în cînd, vom găsi și un opaiț care să ne împiedice să lunecăm de pe o treaptă abia săpată.

— Poate că aceste probleme ar fi putut fi descurcate dacă ele ar fi preocupat pe matematicienii din antichitate în aceeași măsură în care ne preocupă pe noi. Dar, era natural ca pe aceia să-i fi interesat, mai întîi, cum să găsească soluțiile problemelor ce le aveau înaintea, nu să mediteze asupra genezei noțiunilor matematice! Și totuși, mi se pare curios că grecii, care și-au arătat măiestria de povestitori în *Iliada* și *Odiseea*, să nu fi fost tentați de istoria matematicilor, mai ales că această știință a fost creată, cinstită și chiar îndrăgită de ei!

— Pe greci nu-i putem învinui, căci ei au scris, numai că scrierile lor nu s-au păstrat decât în parte. De pildă, cele mai vechi informații se găsesc la Herodot, așadar din secolul al V-lea î.e.n. El arată că în Egipt, pe vremea faraonilor, pământul era împărțit în loturi pe care inundațiile le mai știrbeau. Apoi, în secolul al IV-lea î.e.n. Eudem din Rodos a scris o istorie a geometriei, dar și din ea nu s-au mai păstrat decât fragmente copiate de către comentatorii operelor lui Aristotel sau Euclid, ca de pildă Proclus, Heron din Alexandria, Nicomah ș.a. Dar ce puteau ști pe atunci grecii de cele ce se petrecuseră cu zeci de milenii înaintea lor, atunci când, deși alfabetul nu fusese inventat, multe adevăruri matematice fuseseră descoperite? Mă întreb chiar, ce au putut ști grecii despre vremurile mai apropiate de ei, de pildă de școlile de scribi, ce funcționau cu cel puțin o mie sau două mii de ani înaintea lor, în Egipt, în câmpia Mesopotamiei sau aiurea?

— Poate că de aceea sînt mulți care încearcă să elimine aceste întrebări afirmînd că omul a avut întotdeauna posibilități naturale de a cunoaște, bazate pe intuiție, pe experiență și pe deducție. Că prin aceste mijloace, proprii firii omenеști, care au intervenit, fie pe rînd, fie simultan, omul a ajuns la procedeele de abstractizare și a învățat cum să se orienteze, cum să măsoare etc., așa numai din necesitate și fără nici o analiză prealabilă, exact după cum și azi omul normal mănîncă atunci cînd îi e foame, doarme cînd îi e somn etc., aceste acțiuni petrecîndu-se în mod spontan.

— Cu alte cuvinte ne întoarcem la domnul Jourdain care făcea proză fără ca să știe? Oricum, atîta timp cît nu se poate dovedi, orice ipoteză poate fi plauzibilă. Problemele de istorie a matematicilor au devenit obiect de cercetare științifică abia de prin secolul al XVII-lea. În unul dintre cele două volume de *Istoria matematicilor* scrisă de D. E. Smith se amintește de o lucrare din secolul al XVI-lea a italianului Baldi, rămasă în manuscris și tipărită abia la începutul secolului al XVIII-lea sub titlul *Cronică a matematicilor* și apoi că, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea, marele matematician englez John Wallis a scris și a încurajat

cercetarea istoriei matematicii. În Franța, astfel de cercetări au fost stimulate de enciclopediști. Mi-aduc aminte cu plăcere că am răsfoit, de multe ori, în Biblioteca de la Seminarul Matematic „Alexandru Myller” din Iași, cele două volume de *Istorie a matematicilor*, publicate în 1808 de către Charles Bossut și mai ales cele patru volume ale lui Jean Etienne Montucla, primul tipărit în anul al VII-lea după Revoluție, iar ultimul în anul al X-lea, când, de data aceasta, în paranteză apare și anul 1802! Desigur că în aceste volume nu trebuie să crezi că ar putea exista informații asupra epocii de început, în ele sînt mai puține informații decît avem azi asupra matematicilor egiptene, babiloniene, chineze, hinduse, în schimb sînt multe și prețioase relatări asupra matematicilor și matematicienilor din epoca noastră. Dar, după cîte văd, ne-am întins la taclale, uitînd că apucasem să urcăm o scărișoară! Cred că ar fi vremea să te hotărâști și să-mi spui, încotro ai vrea să o luăm? Fiindcă, vezi bădie, există două noțiuni fundamentale care, oricît ar părea de curios, deși sînt strîns legate împreună, au rămas despărțite, aceea de *număr* și aceea de *figură geometrică*.

Cercetările și rezultatele stabilite în legătură cu relațiile dintre numere au dus la crearea *Aritmeticii*, iar acelea asupra mărimii și pozițiilor relative ale figurilor geometrice au format *Geometria*. *Aritmetica* și *Geometria* sînt cele două izvoare principale, peste care dăm ori de cîte ori se caută începuturile matematicilor. Chiar dacă mai tîrziu apele lor s-au contopit, izvoarele și-au păstrat limpezimea și locurile ne-schimbate și nu putem alerga de la unul la altul ca să urmărim cursul lor, în același timp.

— La grea încercare mă mai pui. Mi-ar place să te aud vorbindu-mi despre numere și totodată rîvnesc la problema spațiului. Te-am auzit vorbind odată cu nepotul meu, Nucu, despre *spațiile abstracte*. Pe mine nici nu m-ai luat în seamă, iar mie, ascultîndu-vă, mi-a venit să rîd și să vă spun: „Măi, filozofilor, ce v-a apucat? adică spațiul însuși nu-i o noțiune destul de abstractă?” Dar vă vedeam așa de serioși... și m-am sfiit să vă întrerup. Există în adevăr *spații abstracte*? Uite,

dacă vrei să știi, problema aceasta a spațiului nu i-a preocupat numai pe cei mai mari filozofi din lume, ci și pe mine.

— Și, în privința *spațiului*, la ce concluzii ai ajuns?

— Mai întâi și întâi, că însăși noțiunea asta de spațiu e tare încurcată. Deși e o noțiune abstractă, există un spațiu real, concret, acela în care trăiesc eu și despre care Immanuel Kant afirma că are proprietăți apriorice, apoi există spațiul cosmic, despre care teoria relativității are nu știu ce fel de rezerve, pe urmă există spațiul geometric cu 1, 2, 3, și mai multe dimensiuni, ba, după câte am auzit, există și spații abstracte — ce-or mai fi și acelea? Iată cât de neclară mi-e noțiunea de spațiu.

— Bine, bădie, tocmai mata să-mi vorbești așa? Oricine știe că un termen *abstract*, prin însuși conținutul lui, este confuz. Numai un cuvânt *concret* trezește în conștiința noastră obiectul de care este asociat numele lui. Când spun „Palatul Culturii din Iași”, matale te și vezi, fără nici un efort, dinaintea statuii lui Ștefan cel Mare, alături de care te jucai adesea pe când erai copil și așa mai departe!

— Dacă-i vorba de exemple, cu *asa mai departe*, atunci de ce n-ai adus de la început vorba despre Seminarul Matematic? Văd că au început să-ți sclipească ochii numai cât am deschis eu gura! Te-ai și văzut acolo, așteptând să ți se coboare din raft cartea ce ai dorit-o, chiar dacă se află pe o poliță de sus, lângă tavan! Ba, să ți se mai aducă și încă una, ca supliment!

— Să știi că mi-a făcut plăcere această evocare a Bibliotecii mele dragi, pe care cine știe dacă voi mai vizita-o. Am revăzut-o fără să fac nici un efort, ceea ce nu s-ar fi întâmplat dacă ai fi pronunțat, de pildă, cuvântul *sferă*. În acest caz, ar fi trebuit să mă gândesc, la ce sferă te referi?

— Îmi pare bine, că de data asta te-am prins eu la strîmtoare! N-ai ales bine cuvântul *sferă*, fiindcă el nu produce în mintea mea nici o încurcătură. O sferă, fiind locul punctelor egal depărtate de un punct fix, numit *centru*, îmi imaginez ușor, în orice punct din spațiu, o sferă, aidoma unui balon de săpun, cu o rază oricât de mare sau oricât de mică,

dacă vrei, chiar cu o rază zero, adică o sferă redusă la un punct!

— Înseamnă că m-ai fi obligat și pe mine să mă gândesc la sfera care-ți convine ție! Eu însă, îmi închipui o sferă cu raza egală cu 3i!

— Asta nu se poate și o spui numai așa, ca să-mi faci mie în ciudă!

— De unde ai scos tu că *nu se poate*?

— Fiindcă distanța între centrul sferei și un punct de pe ea trebuie să fie un număr real și nu imaginar! Ce înseamnă *distanță imaginară*?

— Vom vorbi noi și despre asta, poate, mai târziu. Acum, ca să te consolez, am să-ți spun că de părerea ta erau toți matematicienii pînă în secolul al XIX-lea, cînd au descoperit geometriile neeuclidiene. După aceea, alături de sfera ta, cu rază reală, a mai apărut și una cu rază imaginară, însă tot așa de reală ca și sfera care ți-e în minte. Numai că e oleacă altfel și de aceea se numește *pseudosferă*!

— Așadar nu-i sferă, deci, te-am prins!

— Nu, fiindcă pentru mine, dacă mă situez în spațiul lui Bolyai-Lobachevski, ea este o sferă. Dar pot să-ți vorbesc și de alte sfere, tot așa de reale pentru mine: o sferă din spațiul cu 4 dimensiuni, sau cu 5, 6, ..., n dimensiuni. Pe care trebuie să o aleg? Continui să susțin că imaginea pe care mi-o evocă mie cuvîntul abstract sferă, e tot așa de clară ca și pentru tine?

— Chiar dacă nu mai susțin aceasta, susțin că am alunecat de la drumul drept. Te rog să ne întoarcem și să începîm mata, frumușel, cu geometria lui Euclid, așa după cum ne-am înțeles!

— Nimic mai simplu, uite am să-ți citesc ce-a scris Heron din Alexandria în legătură cu procesul de abstractizare în geometrie: „Geometria și-a format obiectul prin abstracție din cauză că dintre corpurile fizice care sînt tridimensionale și au materie, geometria a separat materia din ele și a creat corpurile geometrice, adică volumul și prin abstracție a ajuns la punct. Ei, acum îți place?

— Deloc! M-am așteptat să-mi spui ceva nou și când colo îmi prezinți o copie după Aristotel! Dacă ai uitat, permite-mi să-ți amintesc, cu destulă exactitate, cuvintele lui: „Obiectele matematice sînt generate prin intermediul abstracției” sau „Ceea ce există în sine, într-o stare neseparată, este privit de matematician ca ceva separat”. Ba mai mult, Aristotel a atras atenția asupra faptului că în noțiunea de abstracție există două semnificații deosebite, prima: *operația de lăsare la o parte* a unor însușiri ale obiectului considerat, a doua: prin abstracție se poate ajunge la *concepțe mai generale*, la o idealizare a obiectelor, semnificație pe care, dealtfel, o scosese în evidență, insistînd asupra ei, chiar Platon.

— Nu zic ba, dar asta s-a petrecut cu vreo patru sute de ani înainte de Heron! Era, cred, timpul ca acestea să fie amintite, fiindcă, din păcate, adevărurile geometrice stabilite de oameni nu se pot transmite prin ereditate! Heron, care era inginer de meserie și nu filozof, s-a exprimat, cu vreo 18 secole înaintea noastră, cu rigurozitatea și precizia de acum, accentuînd, pe de o parte, procesul de abstractizare a materiei din care este compus corpul fizic, iar, pe de alta, pe acela de abstractizare a dimensiunilor.

— Vrei să spui că el *subînțelegea* faptul că, de la corpurile tridimensionale se ajunge, prin abstractizare, la cele bidimensionale și de la acestea la acelea cu o dimensiune sau fără nici o dimensiune, cum este punctul? Recunosc, totuși îmi permit din nou să temperez entuziasmul tău, revenind la original, adică la Platon, unde expunerea e mai limpede. Pentru Platon, obiectele matematice erau situate undeva între *idei*, considerate de el drept modele perfecte ale obiectelor reale, și obiectele însăși. Această poziție intermediară arată că obiectele matematice erau privite drept niște *forme abstracte*, sustrase materiei și timpului! De aceea, aceste obiecte geometrice se reprezentau prin figuri desenate cu rigla și compasul pe hîrtie, figuri prin care se defineau proprietățile lor caracteristice. Or, figura în sine, fiind desenată pe hîrtie devenea, prin ea însăși, un model de abstractizare a spațiului cu trei dimensiuni!



— Stai, că aici nu-i chiar așa de simplu cum încerci să prezinți lucrurile! Pentru Platon, figura în sine era o *reprezentare concretă* a obiectului real și prin ea demonstrația logică devenea intuitivă. Rămîne însă adevărat că aceste desene au contribuit îndeaproape la stabilirea modelelor abstracte ale corpurilor geometrice, forme în care se păstrează relațiile de ordonare și de dimensionare dintre corpul real și modelul său geometric.

— Iacă, și acum am să te întrerup, ca să-ți amintesc de o altă observație a lui Platon, pe care am găsit-o în *Republica* lui. El scria acolo că: „Geometrii folosesc figuri vizibile și judecă pe ele, dar ei nu se gîndesc la aceste figuri, ci la altele, cu care seamănă, dar care nu pot fi văzute decît în minte!”

— Mi-o amintesc, însă mă întreb de ce te ții morțiș de Platon cînd nici lui Tales sau Pitagora nu le-a fost străin procesul de abstractizare? Ba sînt sigur că el a fost practicat și de matematicienii egipteni, sau babilonieni, sau de alții cu mult înaintea lor, fiindcă altfel nu s-ar putea explica rezultatele, adică formulele de calcul din geometrie, care datează de nu se știe cîtă vreme! Cînd scribul egiptean socotea cît de mare era suprafața unui ogor, el nu se gîndea nici unde-i situat el, nici ce calități avea pămîntul considerat, nici al cui era, ci avea în vedere numai dimensiunile lui: lungimea și lățimea. Dealtfel, în papirusul Rhind găsești figuri geometrice desenate, în mod stîngaci desigur, caracteristic unui elev, dar aidoma modelului fizic indicat de problemă. Acestor figuri nu li se aplică, oare, observația lui Platon?

— Nu aș putea jura! Acele desene s-ar putea interpreta și ca niște schițe topografice ale terenurilor respective, nu numai decît ca modele ale unor figuri geometrice, așa cum vor fi ele considerate de matematicienii greci.

— Incontestabil că poate exista această deosebire între cele două moduri de a desena o figură geometrică. Mai mult chiar, s-ar putea afirma că egiptenii și-au stabilit formulele altfel decît grecii, anume bazîndu-se pe un proces de inducție, adică în urma unui șir lung de încercări și reușite particulare. Meritul lui Tales și al matematicienilor greci

ce i-au urmat, constă și în aceea că ei au înțeles deosebirea dintre un adevăr stabilit pe cale inductivă și un altul, dovedit prin raționament. În primul caz, adevărul se prezintă ca *probabil adevărat*, siguranța o are numai raționamentul logic care decurge din relațiile existente între diferitele părți ale unei figuri. Tales și elevii lui au formulat primele raționamente și, prin el, geometria a pășit pe o treaptă mai înaltă de abstractizare. Faptul s-a precizat în școala lui Pitagora, unde se insista asupra demonstrării teoremelor cât mai riguros posibil, ținându-se seamă de definițiile noțiunilor abstracte, apoi a fost continuat și discutat în școala lui Platon care a deschis calea către logica lui Aristotel: „știință a ideii pure, adică a ideii că elementul abstract al gândirii este gândire a gândirii” cum va spune Hegel, peste vreo două mii de ani! Aristotel este acela care a contribuit, cel mai mult, la pregătirea terenului pe care se va dezvolta geometria lui Euclid!

— Mi-ai spus odată că au fost scrise geometrii și mai înainte de Euclid.

— Așa-i. Chiar în secolul al V-lea î.e.n. Hippocrate din Chios a scris o carte de geometrie pe care a intitulat-o, ca și Euclid, *Elemente*. Despre ea nu se cunoaște nimic în afară de titlu. Pe vremea lui Platon s-au mai scris alte două geometrii, una de către Leon și alta de către Theodios. Aceste lucrări s-au pierdut și ele deși, după informațiile rămase, serveau drept manuale atât în Academia lui Platon, cât și în *Lyceum*-ul lui Aristotel.

— Nu-i de mirare, nu au putut ține piept colosului lui Euclid!

— Bine spus! Servind de model, nu numai geometrilor din antichitate, ci și acelora de mai târziu și pînă în vremea noastră, *Elementele* lui Euclid, cu toate criticile ce i s-au adus, rămîne un colos! La început, cred că s-au impus prin noutate; dintr-o dată, *Geometria* se prezenta *altfel* decît ca o colecție de teoreme mai mult sau mai puțin disparate! Ea apărea ca un *model* de știință abstractă, ca un *sistem unitar* de adevăruri ce decurg *în mod logic*, unele după altele, pe calea raționamentului deductiv, pornindu-se numai de la definiții, postulate și axiome! Știi, poate, care sînt cele

șase principii logice, formulate de Aristotel, pe care Euclid le-a pus la baza *Elementelor* lui?

— S-ar putea să nu le știu? Îmi face plăcere să mi le repet, și de aceea nu le uit și nu alerg repede la caiet, cum fac alții! Iată-le:

- (1) formularea generală a problemei sau teoremei;
- (2) desenarea figurilor corespunzătoare, așa cum apar din datele concrete ale problemei;
- (3) expunerea și analiza datelor;
- (4) construcții ajutătoare care pot conduce la rezolvarea problemei;

(5) demonstrația propriu-zisă și

(6) concluzia, ce trebuia să apară, independentă de figurile folosite! Ei, ce zici, bădie, credeaai că mă ai în mână și când colo, ți-am alunecat ca zvîrluga! Așa că, e rîndul meu la întrebare! De ce Euclid nu a dedus teoremele de geometrie pornind numai de la definiții, așa cum susținea Platon că este posibil și cum a procedat, dealtfel, el însuși în cărțile VII, VIII și IX în care tratează aritmetica? De ce a așezat la bazele geometriei postulatele și axiomele?

— Prin această întrebare răscolești una dintre cele mai încurcate probleme cu care au avut să se chinuiască geometrii greci din antichitate. Problema are la origine modul în care s-au reflectat în gîndirea matematică cele două laturi contradictorii ale materiei: *continuitatea* și *discontinuitatea*. Imaginile matematice abstracte ale acestor două contrarii sînt: *numărul întreg*, expresie a unei mulțimi discrete de obiecte *distincte și indivizibile* și *întinderea geometrică*, adică *linie, suprafață, volum*, imagine a continuului neîmpărțit în părți, dar avînd calitatea că *se poate divide la nesfîrșit*.

Odată precizate noțiunile de unitate și de număr (bineînțeles *număr întreg*, egal cu o mulțime compusă din unități, căci altfel de numere nu au fost concepute de greci) și după ce s-au stabilit relațiile cele mai simple dintre numere, Euclid a putut să dezvolte aritmetica în mod genetic, constructiv, adică construind teoremele din aproape în aproape, prin generalizări succesive ale relațiilor cele mai simple stabilite în prealabil, fără să întîmpine nici o dificultate.

În geometrie însă, metoda aceasta *genetică* nu avea nici o șansă de reușită, pe de o parte fiindcă *punctul* era conceput ca un indivizibil, iar *dreapta*, *suprafața* sau *volumul* ca mărimi continue și divizibile la infinit, și pe de altă parte fiindcă măsurarea mărimilor geometrice, linii, suprafețe, volume puneau față în față aceste contrarii: *continuu* care trebuie măsurat cu unități *discontinue*, *discrete*! Era natural ca în felul acesta să se nască paradoxul! La întrebarea ce este linia, Aristotel susținea că linia este un continuu, divizibil la infinit, pe când Democrit susținea că, deși are aspectul de continuu, linia este formată din atomi!

— Asta-i cam așa! De îndată ce se pune problema evaluării unei mărimi continue, lucrurile trebuiau să se burzu-luiască, fiindcă o mulțime discretă de obiecte o poți număra, dar când trebuie să măsoară o lungime și îți alegi o unitate de măsură care nu se cuprinde de un număr exact de ori în lungimea de măsurat, atunci începe operația de reconsiderare a unității de măsură. Existau astfel două posibilități:

(1) una dintre noile unități de măsură să se cuprindă exact în lungimea dată și atunci *mărimea ei* se exprima prin raportul numerelor întregi respective, raport care azi se numește număr *fracționar* sau *rațional*, și

(2) să nu existe o unitate comună de măsură și, în acest caz, se ajunge la noțiunea de *mărime irațională*, cunoscută de însuși Pitagora și exprimată prin exemplul clasic legat de diagonală pătratului.

— Îmi place cât de pompos te exprimi: „*exemplu clasic*“!

— Atunci ce epitet ai să-i atribui lui Platon care spunea că „nu merită numele de om, acela care nu știe că diagonală pătratului este incomensurabilă cu latura sa“? Dar te iert de răspuns dacă-mi amintești frumoasa demonstrație a acestui adevăr! Am știut-o și poate că o mai știu, dar mi-ar face plăcere să o ascult din gura ta!

— Sînt sigur că o știi! Dacă desenăm pătratul și-i ducem diagonală (fig.1) notînd latura pătratului cu a și diagonală cu b , teorema lui Pitagora ne dă: $a^2 + a^2 = b^2$ sau $2a^2 = b^2$. Dacă măsoară diagonală cu latura înseamnă că trebuie să

calculez raportul $\frac{b}{a}$. Din relația pe care am stabilit-o avem $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$. Or, în ipoteza că a și b sînt numere întregi, această relație este imposibilă. Într-adevăr, presupunînd contrariul, înseamnă că numerele a și b sînt numere prime între ele,

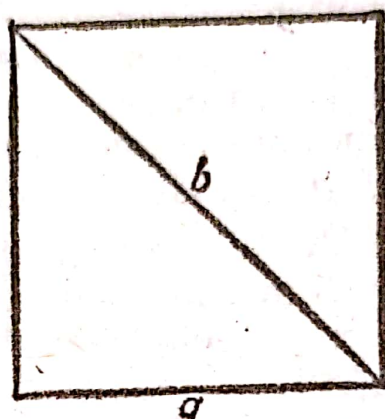


Fig. 1

căci dacă ele ar avea un divizor comun, atunci în raport el s-ar fi simplificat. Dar fiindcă $\frac{b^2}{a^2} = 2$ rezultă că $b^2 = 2a^2$, adică b^2 este un număr par. De aici rezultă că el este de forma $b^2 = (2b')^2$ și înlocuind avem $4b'^2 = 2a^2$ sau $2b'^2 = a^2$, de unde rezultă că și a este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza că a și b sînt numere prime între ele. Rezultatul absurd la care am ajuns dovedește că a și b nu sînt amîndouă numere întregi, ci de altă natură, adică iraționale. Ei? Nu ai fi putut face singur demonstrația?

— Cred că nu. După ce aș fi scris teorema lui Pitagora, nu știam cum să pun problema măsurării, deși ar fi fost destul de simplu! Dar pentru mine semnul de întrebare a rămas încă, anume sub forma următoare: Dacă existența mărimilor incommensurabile era admisă, despre ce paradox vorbești și cum se ajungea la el? Te referi la paradoxurile lui Zenon?

— Și la ele, dar nu voi insista asupra lor fiindcă le cunoști. Mai exista unul ce pune în încurcătură atît pe susținătorii ipotezei lui Aristotel cît și pe cei ce erau de partea lui Demo-

crit. Iată-l: să considerăm un segment de dreaptă și să-l împărțim, mai întâi în două părți egale și apoi pe rînd, fiecare jumătate în cîte două părți egale și așa mai departe. Întrebarea este: ce se va întîmpla dacă se continuă împărțirea la nesfîrșit? După ipoteza lui Aristotel, continuînd împărțirea se va ajunge la un segment de lungime nulă, fiindcă atîta vreme cît el nu se distruge complet, împărțirea poate continua. Procedînd acum la reconstituirea segmentului inițial din părțile componente, constatăm că el a dispărut fiindcă o sumă, chiar infinită, de segmente de lungime nulă, reprezintă tot un segment de lungime nulă! Dacă se admite însă ipoteza lui Democrit și se presupune că prin împărțirea dreptei s-a ajuns la *atomi* adică la *puncte indivizibile*, aceste puncte sînt, la rîndul lor, niște segmente extrem de mici dar avînd totuși o mărime finită. Încercînd reconstituirea segmentului inițial, nu dăm nici de data aceasta peste el, ci peste un altul, de lungime infinită, reprezentînd suma unui număr infinit de segmente de lungime finită!

— Da, acum am înțeles perfect! Un segment de dreaptă nu se poate compune din puncte, în același mod cum se compune numărul 60 din 60 de unități! Această ultimă pîrticică a dreptei era cu adevărat o *buturugă mică* în stare să răstoarne carul îndesat de teoreme al geometriei!

— Ca să ocolească această buturugă ce-i sta în cale, Euclid a apucat pe un alt drum, pe care el însuși l-a deschis, spunîndu-și că buturuga poate rămîne acolo să aștepte pînă s-ar găsi alții, mai vrednici, să o cerceteze și să o mute din loc.

— Nu se poate spune că n-a așteptat destul!

— Cam vreo două mii de ani! N-ar fi cazul oare ca și taifasul nostru să mai aștepte? Nu de alta, dar văd că ploaia a stat și soarele îi cam aproape de amiază.

— Dacă spui mata, cine ar îndrăzni să te contrazică? Numai că te rog să nu uiți că după-amiază ai de parcurs vreo 2200 de anișori ca să mă scoți la lumină!



— Și ai vrea să bați recordul, străbătînd această distanță astronomică numai în cîteva ceasuri? Atunci, după mîncare e cazul să tragem și un pui de somn!

★ ★

— Prin cărțile de geometrie, cu care încep *Elementele*, șase la număr, mi-a spus Teodor Solonar cînd am reluat discuția întreruptă la vremea prînzului, Euclid a stabilit o metodă nouă și originală de a prezenta cunoștințele matematice, numită mai tîrziu *metoda axiomatică*. El a aplicat-o la geometrie, dar în epoca noastră ea a fost generalizată (tot prin abstractizare), astfel ca să cuprindă și alte sisteme matematice în afară de geometrie.

— Vrei să spui că, obligat să evite contradicțiile ce s-ar fi ivit dacă ar fi conceput linia, suprafața sau volumul compuse din puncte și ar fi aplicat metoda constructivă, Euclid a considerat aceste elemente primordiale ca obiecte date, a stabilit relațiile reciproce dintre ele prin postulate și axiome, urmînd ca teoremele să fie deduse din aceste afirmații acceptate fără nici o justificare? Trebuie să-i fi fost dragi caii...

— Ce au caii cu axiomatica, mă rog?

— Iaca au! Că de la ei trebuie să-i fi venit lui Euclid în minte să le pună ochelari geometrilor ca să nu vadă decît numai înaintea ochilor, adică ceea ce le cerea el prin axiome!

— S-ar putea, mi-a răspuns rîzînd prietenul meu. Dacă niște bătaî în ușa l-au putut inspira pe Beethoven să scrie „Simfonia destinului“, de ce n-ar fi posibil ca o pereche de ochelari de cai să fi declanșat în mintea lui Euclid ideea metodei axiomatice? Euclid a realizat astfel un model perfect și durabil de știință deductivă și totodată un model abstract și unic al spațiului în care trăim.

— Mi se pare că, totuși, au fost găsite pricini de critică a acestei opere unice și perfecte?

— Asta-i în firea lucrurilor, pete sînt și în Soare, iar fără cusur rămîne o operă numai atîta vreme cît nu a fost înfăptuită! Cel mai mult a fost atacat postulatul paralelelor,

prin care se afirmă că dintr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce, într-un plan, decât o singură paralelă la acea dreaptă.

— Și ce meteahnă i-au găsit acestui postulat? Se îndoiu de el?

— Nicidecum! Erau ferm convinși de adevărul pe care-l exprima însă nu și de faptul că locul lui ar fi fost printre postulate. Părea mai puțin evident decât alte postulate și se credea că ar putea fi stabilit printr-o demonstrație, cu alte cuvinte redus la o teoremă. Dealtfel, problema paralelelor preocupa pe geometrii greci încă mai înainte de a se fi scris *Elementele*. Este amintită și în lucrările lui Aristotel astfel: „unii matematicieni au încercat să demonstreze paralelismul a două drepte bazându-se pe egalitatea unghiurilor corespondente, fără să știe că ei se bazau tocmai pe ceea ce nu putea fi demonstrat dacă liniile nu ar fi fost paralele”. De atunci și pînă azi, mulți matematicieni au fost de părere că însuși autorul *Elementelor* a avut îndoieli cu privire la natura — postulat sau teoremă — a adevărului asupra paralelelor. Iată de pildă cum se exprimă geometrul român, academician profesor Gheorghe Vrânceanu¹: „este probabil că și Euclid să se fi gîndit la acest lucru, deoarece, cum am văzut, el utilizează axioma paralelelor după ce demonstrează o serie de teoreme care nu presupun această axiomă”. Iar dacă vrei să o luăm mai de la început, am notat aici cele ce scria Proclus, comentatorul *Elementelor*, despre postulatul al V-lea. Cred că știi că i se mai spune și așa sau încă și axioma a XI-a?

— Da, sînt numerele cu care apare această propoziție în diferite texte ale *Elementelor*. În unele copii, ea este trecută printre postulate și atunci este al V-lea, iar în altele la axiome și atunci e numerotată drept a XI-a.

— În comentariul său, Proclus arată mai întîi că Gemino (secolul I î.e.n.) a încercat să demonstreze postulatul al V-lea și apoi continuă așa: „această propoziție trebuie eli-

¹ G. Vrânceanu, C. Telesman: *Geometrie euclidiană. Geometrii neeuclidiene. Teoria relativității*, Editura tehnică, București, 1967, p. 92.

minată complet din rîndul postulatelor căci ea este o teoremă ce prezintă dificultăți pe care Ptolemeu și-a propus să le elimine". Așadar, iată trei date importante: secolul I î.e.n., Gemino, secolul II e.n. Ptolemeu și secolul V e.n. însuși Proclus.

Odată cu traducerea *Elementelor* în limba arabă, s-a ivit și problema postulatului paralelelor. Începînd din secolul al VIII-lea, timp de patru secole, au fost scrise numeroase lucrări în care sînt arătate metodele ingenioase prin care se căuta—fără nici un rezultat pozitiv — să se demonstreze postulatul paralelelor. Printre acestea am să-ți aduc la cunoștință că se află și o încercare a marelui poet Omar Khayyam, despre care știi că a fost și mare matematician. Apoi, această pasiune s-a trezit la matematicienii europeni din timpul Renașterii și a continuat pînă în secolul al XIX-lea cînd, ca orice pasiune, s-a stins!

— Era și timpul, că de peste două mii de ani obseda lumea! Și, drept să-ți spun, nu înțeleg cum de au putut să existe atîtea minți luminate, atîția oameni, buni cunoscători ai domeniului și nu niște diletanți, atîția oameni în toată firea, care au contribuit la progresul matematicilor, care să se lase seduși de această idee fixă, că ar putea demonstra că printr-un punct exterior unei drepte, în planul format de punct și dreaptă, se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă?!...

— Și eu aș vrea să-ți spun drept că privești lucrurile cam superficial și de aceea *nu-i de mirare că te miri!* Fiindcă, pentru un matematician adevărat, avea mare importanță dacă postulatele, considerate ca atare, sînt sau nu independente între ele, or asta nu se putea stabili decît arătînd că unul dintre ele ar putea apărea ca o consecință a celorlalte. Iar dacă nu ar fi independente, urmează că tot edificiul geometriei se sprijină pe mai puține adevăruri evidente! Dar tocmai aici apare iluzia. De pildă, un celebru matematician, cum era John Wallis, a fost tentat să creadă că a putut stabili postulatul paralelelor admitînd existența figurilor asemenea, „ca o propoziție auxiliară”, spunea el! De fapt, el a înlocuit postulatul paralelelor cu altul echivalent lui.

— Adică, și-a furat singur căciula de pe cap!

— Cam așa! Se cunosc peste 200 de încercări de această natură, dar trebuie să fi fost mult mai multe, căci nu toate au fost tipărite. Pe mine m-a amuzat să notez unele dintre ele, într-un caiet. Ai rîs de el azi dimineață, dar dacă ți-ar veni vreodată gust să le cunoști, caietul te așteaptă! Pînă atunci, am să-l folosesc eu ca să-ți prezint o atare încercare publicată pe la începutul veacului al XVIII-lea, de Girolamo Saccheri, sub titlul *Euclid curățat de orice pată*.

— Prețios titlu!

— Mai degrabă naiv, fiindcă Saccheri a avut o idee cu totul originală, ce l-ar fi putut duce la dezlegarea definitivă a problemei, dar a trecut, ca un naiv, pe lângă ea, fără să o vadă. Ideea originală a lui Saccheri a fost să demonstreze existența postulatului al V-lea prin reducere la absurd, adică să-l înlocuiască prin altul contrar lui și să tragă concluzia din consecințe. Așadar, în loc să admită postulatul al V-lea, a presupus:

(1) că printr-un punct, la o dreaptă se pot duce mai multe paralele, sau:

(2) că printr-un punct, la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă, bineînțeles, în ambele cazuri fiind vorba de planul figurii formată de dreaptă și punct. Admițînd toate celelalte postulate și axiome stabilite de Euclid, Saccheri a dedus, în ambele cazuri, rînd pe rînd, toate teoremele corespunzătoare aceloră din Elemente, așa cum decurgeau ele în mod logic, ținînd seama de una sau de cealaltă ipoteză asupra dreptelor paralele. Rezultatele au fost surprinzătoare, căci, în ambele cazuri, el a găsit cîte o *geometrie nouă, perfect riguroasă*, cu teoreme ce nu se contraziceau între ele deși, comparate cu teoremele din *Elementele* lui Euclid, nu aveau nici un sens intuitiv. De pildă, reieșea, printr-o demonstrație perfect logică, în primul caz că suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte, iar în cel de al doilea, că această sumă este mai mare decît două unghiuri drepte. „Sînt consecințe *perfect logice* ale postulatelor impuse de mine“, gîndea Saccheri, „dar aceste consecințe sînt absurde și prin aceasta se dovedește, fără drept de apel,

că postulatul al V-lea este independent de celelalte, adică este postulat și nu teoremă"! Dar cred că are să te distreze să-ți citez chiar cuvintele lui: „pînă la sfîrșitul primei părți din această carte mai rămîn încă 12 teoreme. Din cauză că enunțul fiecăreia în parte este prea complicat, nu le mai arăt, ci spun că, în sfîrșit, acolo ipoteza recalcitrantă a unghiului ascuțit este demascată ca un neadevăr evident, căci ea ar trebui să admită două linii drepte care ar avea în același plan o perpendiculară comună, în același punct“.

— Deși vorbești pe înțeles, eu nu te pot pricepe. Despre ce unghi ascuțit este vorba?

— Aici ai dreptate, nu ți-am spus totul. Ca să introducă acele două postulate, opuse postulatului al V-lea, Saccheri construiește un patrulater, ridicînd la extremitățile segmentului $T T'$ două perpendiculare egale, TC și $T'C'$ și unind C cu C' (fig. 2). Acest patrulater este un dreptunghi numai în cazul postulatului al V-lea, căci atunci și unghiurile C și C' sînt unghiuri drepte. Dacă nu se admite postulatul paralelelor, atunci, din cauza simetriei, unghiurile C și C' sînt numai egale și pentru ipoteza (1) ele sînt ascuțite, iar în cazul ipotezei (2) ele sînt obtuze. Acest patrulater este cunoscut azi sub numele de patrulaterul lui Saccheri. Interesant că aceeași idee, a patrulaterului lui Saccheri, a avut-o, în orientul apropiat, atît Omar Khayyam, cît și matematicianul

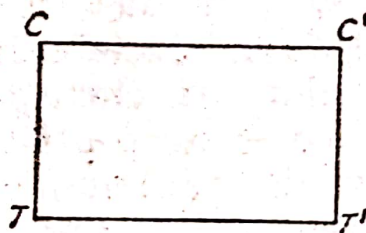


Fig. 2

iranian Nassireddin al-Tusi din secolul al XIII-lea. Se pare că lucrarea lui Nassireddin a fost cunoscută de John Wallis și de Saccheri fiindcă ea a fost tipărită, în traducere latinească, la Roma, în secolul al XVII-lea.

— Foarte curioasă treabă! Vezi, mă întreb adesea și eu, cum de se împacă faptul că, deși figurile geometrice sînt *forme pure, golite de materie*, nu mi le pot imagina altfel decît existînd și umplînd spațiul real în care trăiesc eu și deși eu știu azi mai multe decît putea ști Saccheri în secolul al XVIII-lea, totuși nu pot accepta, exact ca și el, ca patrulaterul lui să nu fie dreptunghi. Și, îmi dau bine seama că la asta te-ai referit atunci cînd ai pomenit de naivitatea lui Saccheri, la acea *intuiție spațială* în care, fiindcă avea o încredere absolută, ea l-a făcut să-i scape cea mai formidabilă descoperire matematică cu care s-ar fi putut lăuda secolul al XVIII-lea, aceea a geometriilor neeuclidiene!

— Da, Saccheri era așa de puternic influențat de intuiția spațiului fizic, încît considerînd absurde consecințele logice ale teoremelor demonstrate de el, a afirmat, sigur de sine și fericit că a reușit să-l curețe pe Euclid de orice pată, că acele *absurdități* dovedesc în mod cert *justețea* postulatului al V-lea! Și totuși, Saccheri avea în felul lui dreptate căci, ca tine și ca noi toți, el avea în minte forma abstractă a spațiului în care trăim și pe care azi îl numim *euclidian* fiindcă numai în acest spațiu sînt valabile teoremele geometriei lui Euclid. Acest *spațiu geometric* este abstract, nu cuprinde în el nici flori, nici Soare, nici Lună, nici scaune, nici cărți, nici televizoare, nimic din ce ne-ar face să ne simțim în spațiul fizic real și totuși, acest spațiu abstract cuprinde *ceva nedefinit* care ne permite să stabilim *distanțele, ordinea și poziția* obiectelor geometrice, unele în raport cu altele. Prin acel ceva nedefinit se ajunge la concluzia că, deși el nu există în mod obiectiv și independent de corpurile ce le conține, are trei dimensiuni, se întinde la infinit și este omogen și izotrop adică, are aceleași proprietăți în toate punctele sale și este același în orice direcție a lui. Nemaexistînd însă alte geometrii în afară de aceea a lui Euclid, nici lui Saccheri și nici nimănui înaintea lui, sau îndată după el, nu i-a trecut prin minte că ar mai putea exista și alte spații geometrice și deci, să-l numească pe acesta *spațiu euclidian*! Pînă în secolul al XIX-lea, spațiul a fost considerat, alături de timp, ca o categorie filozofică și nu preocupa decît pe filozofi sau pe

geometriei dispuși să filozofeze. Așa cred că se explică de ce, aproape la 50 de ani după ce Saccheri a publicat lucrarea sa, Immanuel Kant în *Critica rațiunii pure* afirma că spațiul este o reprezentare *necesară, apriori*, care stă la baza tuturor intuițiilor și a tuturor fenomenelor exterioare și că „geometria este o știință care determină proprietățile spațiului, în mod sintetic și totuși *apriori*“. Iată că nu numai Saccheri dar și un filozof de talia lui Kant nu a putut trece dincolo de spațiul euclidian, nu și-a putut imagina posibilitatea altuia, deși, după cum ți-am spus, despre axioma paralelelor se scria, nu glumă! Singurul care a înțeles cum stau lucrurile și prin urmare cât de complexă este problema spațiului geometric, a fost Karl Friedrich Gauss. El a fost acela care a afirmat, pentru prima oară, că postulatul paralelelor nu poate fi demonstrat, că acesta este independent de toate celelalte axiome sau postulate ale geometriei lui Euclid și că de aici apare în mod firesc concluzia că pot exista și alte geometrii, bazate pe alte axiome decât acelea considerate de Euclid. Aceste păreri le-a comunicat, într-o scrisoare, în anul 1829 prietenului său, matematicianul F. Bessel, însă ca pe o taină pe care i-a cerut să nu o divulge, fiindcă se temea „de gălăgia boețienilor“.

— Boețienilor, ai zis? Dar acest termen îmi pare foarte de ocară căci geometria pe care a scris-o Boethius în secolul al VI-lea, pe când zăcea în închisoare, numai geometrie nu poate fi numită! Se găsesc în ea câteva cunoștințe elementare scoase din geometria lui Euclid, bune să amăgească ignoranța caracteristică a matematicienilor din Evul Mediu. Aș trage de aici concluzia că marele Gauss își cam disprețuia confrății! Dealtfel, să știi că nu aștept să-mi răspunzi la aceste observații ale mele, fiindcă ai și tu ciudă pe el că nu l-a încurajat pe János Bolyai și îți dau dreptate! Dar câți ani avea Gauss când a scris acea scrisoare?

— Să vedem! Se născuse în anul 1777, așadar, avea 52 de ani. Cu doi ani mai devreme publicase un studiu asupra suprafețelor, studiu fundamental pentru dezvoltarea ulterioară a geometriei diferențiale.

— Atunci, încă un semn de întrebare! Era în plină maturitate și glorie și, cu toate acestea, primul din lume dintre matematicienii de atunci nu a îndrăznit să se atingă de falsul absolutism al geometriei euclidiene? De ce? Din comoditate?

— Uite ce cred eu: dacă ne lăsăm antrenați de *enigma Gauss*, atunci adio spații neeuclidiene, adio spații abstracte!

— Ba nu! adio Gauss și salve Bolyai, salve Lobacevski!

— Și eu îi salut cu admirație pe acești doi tineri, necunoscuți pînă atunci în lumea matematicienilor, care au îndrăznit să afirme existența geometriilor neeuclidiene, în ciuda neîncrederii și a batjocurii cu care a fost întâmpinată — *de boțieni* — minunata lor descoperire! Mă închin acestor doi tineri, contemporani și înfrățiți în gândire, care nu s-au cunoscut unul pe altul, deși au știut unul de altul: János Bolyai, născut la Cluj în 1802 și Nikolai Lobacevski născut la Nijni-Novgorod cu zece ani mai înainte. Afirmatia entuziastă a lui János Bolyai din scrisoarea trimisă, în 1823, tatălui său: „am scos din neant un univers întreg“, s-a dovedit a fi cu mult mai plină de înțeles decît o crezuse însuși Bolyai cînd a recunoscut că descoperise o comoară ascunsă de veacuri celorlalți matematicieni, comoara pe care Lobacevski avea să o numească încă și *Pangeometria*.

— În grecește *pan* înseamnă *tot* sau *pretutindeni*. Cum crezi că trebuie interpretat acest titlu?

— Cred că Lobacevski a dat cuvîntului *pan* înțelesul de *universal* și deci geometria, pe care credea că a descoperit-o numai el, voia să se numească *geometrie universală*.

— Oare nu era exagerat?

— Din contra, a fost spusă cu tîlc, fiindcă i-a dat această denumire abia în ultima sa lucrare, „apărută în 1855, pe care a dictat-o bătrîn și lipsit de vedere, însă păstrînd fermitatea spiritului și convingerea în dreptatea cauzei sale“, cum scrie cunoscutul matematician sovietic A.D. Alexandrov¹. Analizîndu-i opera, el arată că Lobacevski a susținut că geometria nu este *apriorică și independentă de experiențe*, așa cum pre-

¹ *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, volumul III — Spații abstracte, Editura științifică, București, 1961, pagina 123 și cont.



K.F. GAUSS

supunea Kant, cu cîteva decenii mai înainte, ci că noțiunile ei *fundamentale* au fost obținute prin simțuri, adică sînt expresia experiențelor ancestrale ale omului, iar aceasta impune ca relația dintre geometrie și realitate să fie precizată și prin experiențe. În acest sens, Lobacevski însuși a încercat anumite experiențe astronomice, fiindcă el era convins că, dacă pentru o porțiune limitată a spațiului real postulatul al V-lea era adevărat, el ar putea să nu mai fie adevărat dacă s-ar lărgi noțiunea de spațiu și s-ar considera o geometrie a spațiului cosmic. În acest caz, pangeometria ar putea fi mai potrivită ca să reflecte proprietățile aceluia spațiu, geometria euclidiană devenind un caz particular al *pangeometriei*. Dealtfel, un veac mai tîrziu, prevederile lui Lobacevski au fost folosite de Einstein în *Teoria relativității*!

— Bine, dar în acest caz, Bolyai și Lobacevski au nimicit dintr-odată concepția pe care am moștenit-o de la greci despre geometrie ca deținătoarea adevărurilor absolute,



K.F. GAUSS

supunea Kant, cu cîteva decenii mai înainte, ci că noțiunile ei *fundamentale* au fost obținute prin simțuri, adică sînt expresia experiențelor ancestrale ale omului, iar aceasta impune ca relația dintre geometrie și realitate să fie precizată și prin experiențe. În acest sens, Lobacevski însuși a încercat anumite experiențe astronomice, fiindcă el era convins că, dacă pentru o porțiune limitată a spațiului real postulatul al V-lea era adevărat, el ar putea să nu mai fie adevărat dacă s-ar lărgi noțiunea de spațiu și s-ar considera o geometrie a spațiului cosmic. În acest caz, pangeometria ar putea fi mai potrivită ca să reflecte proprietățile acelui spațiu, geometria euclidiană devenind un caz particular al *pangeometriei*. Dealtfel, un veac mai tîrziu, prevederile lui Lobacevski au fost folosite de Einstein în *Teoria relativității*!

— Bine, dar în acest caz, Bolyai și Lobacevski au nimicit dintr-odată concepția pe care am moștenit-o de la greci despre geometrie ca deținătoarea adevărurilor absolute,

deoarece ele exprimă rezultatele obținute prin abstractizare din experiențele asupra spațiului... Dacă se admite că, din punct de vedere logic, poate exista și o altă geometrie, atunci, tot în mod logic, poate exista încă una, adică un număr nelimitat de geometrii deosebite de ale lui Euclid, toate fiind științe abstracte, dezvoltate pe calea raționamentului din anumite ipoteze. Ce mai rămâne adevărat despre reprezentarea intuitivă a spațiului fizic, despre figurile geometrice, așa de precis conturate și chiar definitive?

— Cam așa s-au întrebat și matematicienii din secolul al XIX-lea și primul răspuns la nedumeririle lor a fost dat de Bernhard Riemann, în 1854, într-o dizertație compusă la sugestia lui Gauss, avînd ca titlu: „Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei”. Cînd a rostit-o, prelegerea nu a fost înțeleasă decît de Gauss și de vorbitor, dar, după moartea lui Riemann, memoriul publicat în 1866 a devenit celebru. În el se arată că noțiunea despre geometrie trebuie revăzută fiindcă geometria nu reprezintă adevărul rezultat din experiențele asupra spațiului fizic înconjurător, ci adevărurile logice asupra spațiilor ce rezultă ca posibile din axiomele-ipoteze puse la bază, iar aceste adevăruri nu au nici o legătură cu reprezentarea intuitivă a spațiului în care trăim. Ca dovadă, arată Riemann, însăși axioma că linia dreaptă este infinită nu este un rezultat al experienței noastre, experiența nu ne arată altceva decît că dacă urmărim o linie dreaptă, atîta cît omeneste poate fi urmărită, nu i se dă de capăt. Ea ar putea fi finită și totuși nemărginită!

— Cum zici că ar putea fi? Finită și totuși nemărginită?

— Da, nemărginită, adică să nu-i dai de capete, dar totuși de mărime finită. Imaginează-ți Pămîntul, ca o sferă și că tu, în loc să stai acum de vorbă cu mine, ai fi pornit la o plimbare, dar nu pe Dea nici pe Runc, ci așa, înainte spre nord, de-a lungul meridianului ce trece prin Cîmpulung și că, fără să te abați de la el, te-ai duce și te-ai duce... ai ajunge la Polul Nord, apoi, după ce vei fi străbătut Alaska, Zambia, Marea Mediterană, Bulgaria ai fi ajuns din nou aici. Atunci te-ai uita încurcat la mine și eu aș izbucni în rîs, întrebînd-

du-te unde-s cele două capete opuse ale drepte și cum de ne-am întâlnit dacă dreapta ta este infinită?

— Ai dreptate, pe o sferă, cercurile mari, așa cum sînt Ecuatorul sau meridianele, joacă rolul liniei drepte din plan, au adică proprietatea de a fi drumul cel mai scurt dintre două puncte. Iar dacă se poate vorbi despre capetele *unui arc de cerc mare*, cercul întreg se închide, nu are capete și nici nu este infinit!

— Ei, acum fiindcă te-am convins, să ne întoarcem la Riemann. El a observat că, dacă ar fi să se facă geometria pe o sferă, atunci postulatul paralelelor nu ar avea sens, fiindcă toate cercurile mari de pe sferă, adică dreptele ei, se întâlnesc în două puncte, de pildă cei doi poli în cazul meridianelor. Pentru o geometrie pe sferă, în locul postulatului al V-lea, ar trebui pus postulatul: „Printr-un punct la o dreaptă (cerc mare) de pe sferă nu se poate duce nici o paralelă”. Cu acest nou postulat și cu celelalte vechi, considerate de Euclid, Riemann a stabilit o nouă geometrie neeuclidiană, care se bucura pe atunci și de avantajul de a se baza pe un model geometric, intuitiv, dovedindu-se astfel a fi, geometria plană pe care ar fi descoperit-o niște ființe inteligente, bidimensionale, ce ar fi trăit pe acea sferă și nu ar fi avut posibilitatea să cunoască nimic dincolo de ea. Pentru ființele acelea, geometria stabilită de Riemann ar fi fost singura logică, absolută și intuitivă.

— Iată un fapt cu totul surprinzător care destramă dintr-o dată un mit țesut pe îndelete de-a lungul a două milenii, afirmînd, în schimb, că axiomele geometriei euclidiene nu sînt adevăruri absolute ci relative, și că geometria euclidiană nu este unica ce poate fi creată. Realitatea geometriilor neeuclidiene, pe de o parte, dovedește că evidența intuitivă poate duce la concluzii false și, pe de altă parte, impune o cercetare mai profundă a axiomelor pe care se sprijină geometria euclidiană.

— Într-adevăr, așa este! Geometria euclidiană este singura care are avantajul, prin ipotezele ce le-a formulat, de a fi modelul abstract al spațiului fizic din imediata noastră apropiere, ea singură are ca obiect relațiile spațiale ale corpurilor

geometrice reale abstractizate. De aceea, demonstrațiile din această geometrie se bazează pe figurile vizibile și intuitive ce se pot desena pe o foaie de hîrtie, adică pe un plan, cu rigla și compasul. În celelalte cazuri, acelea ale geometriilor neeuclidiene, asemenea desene executate cu rigla și compasul pe o foaie de hîrtie sînt lipsite de sens căci ele contrazic intuiția.

— Cred și eu! Nu văd cum aș putea desena, așa ca să le văd, mai multe drepte paralele duse din același punct la o dreaptă și, de asemenea, nu-mi pot închipui că nu aș putea fi în stare să trag o paralelă la o dreaptă! Aceste lucruri le pot admite ca adevărate numai fiindcă sînt posibilități logice impuse prin axiome, dar fără să încerc a le reprezenta pe o foaie de hîrtie întinsă!

— Ai spus bine: *foaia de hîrtie întinsă*, fiindcă lucrurile se schimbă de îndată ce se înlocuiește planul cu o suprafață sferică în cazul geometriei lui Riemann sau cu o suprafață pseudosferică în cazul geometriei lui Bolyai-Lobacevski.

— Prin această lucrare a sa, văd că Riemann a corectat și greșeala pe care o făcea Saccheri, anume, el a precizat faptul că, dacă teoremele unei geometrii sînt verificate de experiență, iar cele ale alteia par a contrazice bunul simț, din aceasta nu rezultă că primele teoreme sînt adevărate și că celelalte sînt false sau absurde. Geometriile neeuclidiene există deci și conduc la o nouă abstractizare, a *noțiunii abstracte de spațiu geometric*!

— În lucrarea lui Riemann, noțiunea de spațiu geometric a atins o treaptă de abstractizare cu mult mai înaltă decît aceea pe care o consideri matale, bădie, fiindcă el a mai introdus o nouă noțiune caracteristică unui spațiu geometric, aceea de *curbură a spațiului*. Bazîndu-se pe ea, el arată că *geometria euclidiană este geometria spațiului de curbură nulă, geometriile neeuclidiene sînt geometrii ale spațiului de curbură constantă*, și, în fine, că există alte geometrii, numite mai tîrziu *riemanniene*, ale *spațiilor curbe*! Dar acestea ți le-am spus așa, numai fiindcă m-ai tras de limbă și ca să accentuez faptul că abstractizarea introdusă prin *noțiunea de spațiu curb* a însemnat o lovitură la fel de puternică dată intuiției

spațiale ca și aceea pe care i-a aplicat-o Fermat și Descartes, în secolul al XVIII-lea!

— De unde ai mai născocit și trebușoara asta? Te gîndești probabil la crearea *geometriei analitice* dar, după modesta mea părere, geometria analitică e geometrie euclidiană în toată regula, fiindcă în ea nimeni nu s-a atins de nici o axiomă sau postulat al lui Euclid! Fermat și Descartes nu au făcut alta decît să introducă un sistem de referință pentru punctele din plan, adică un sistem de coordonate, iar mai tîrziu, alții au aplicat metoda și pentru punctele din spațiu, care însă a rămas euclidian!

— Da, cam așa a și fost judecată pe atunci geometria analitică, fiindcă nimeni nu ar fi fost în stare să tulbure noțiunea cristalină de spațiu geometric corespunzător spațiului fizic! Numai că, prin introducerea unui sistem de coordonate, locul unui punct din plan sau din spațiu îl deținea o pereche sau un triplet de numere algebrice. Continuînd procedeul, în locul dreptei din plan se furișă o ecuație de gradul întâi între variabilele x și y , considerate drept coordonatele unui punct variabil de pe acea dreaptă; în locul unei curbe apărea o ecuație de forma $y = f(x)$, a unei suprafețe, altă ecuație $z = f(x, y)$, toate *proprietățile geometrice* ale acestor *figuri geometrice* fiind cuprinse în expresia analitică a formulelor respective. Alte formule algebrice corespundeau distanței dintre două puncte, atît în plan cît și în spațiu, ariei unui triunghi, volumului unei piramide și așa mai departe.

— Stai că parcă acum a început să-mi fulgere ceva prin minte. Unde vrei să ajungi? Vrei să spui că, în geometria analitică, toate *relațiile geometrice* dintre *figurile geometrice* ale *spațiului geometric*, s-au redus la calcule, la *relații algebrice* dintre *numere algebrice*, așadar, că spațiul geometric a fost topit în masa formulelor algebrice?! Dar bine, pînă acum eu am considerat asta ca o calitate și nu ca un defect! Nu m-am gîndit că expresiile algebrice ar impieta intuiția spațială, ci că, din contra, algebra s-a îmbogățit cu calități intuitive, împrumutate de geometria pe care a ajutat-o! Nu se mai vorbește și nu se mai gîndește la soluția unui sistem de două ecuații

de gradul întâi, cu două necunoscute, ci la intersecția a două drepte, punctul lor comun fiind soluția căutată.

— Este adevărat și cele ce spui tu. Aceasta este o față a medaliei, dar în același timp există și cealaltă față. Spațiul geometric intuitiv s-a transformat într-o noțiune cu mult mai abstractă, aceea de *spațiu aritmetic* sau *numeric*, adică într-o mulțime infinită de dublete sau triplete de numere algebrice. Numai în acest *spațiu aritmetic* a fost posibilă și extinderea numărului de dimensiuni ale spațiului geometric, considerându-se un spațiu, *euclidian deocamdată*, cu 4, 5, 6, ... sau chiar n dimensiuni, unde n poate fi și un număr nedefinit! Ca să se ajungă aici a fost de ajuns să se mărească numărul coordonatelor unui punct și apoi să se generalizeze formulele stabilite în geometria analitică tridimensională, în același mod. De pildă, distanța dintre două puncte $A(x, y, z, t)$ și $B(x_0, y_0, z_0, t_0)$ din spațiul euclidian cu 4 dimensiuni este $d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 + (t - t_0)^2}$ adică, după cum poți observa, se exprima tot prin teorema lui Pitagora, generalizată la spațiul cu patru dimensiuni! La fel se petrece și cu celelalte proprietăți geometrice ale figurilor dintr-un spațiu cu mai multe dimensiuni, căruia i-am zis euclidian, fiindcă, după cum ți-am spus, distanța dintre două puncte o socotesc, sau o definesc, prin teorema lui Pitagora generalizată, teoremă care nu-i valabilă decât numai în ipoteza postulatului paralelelor, pus de Euclid. Însă, dacă am ajuns la geometria analitică trebuie să o și depășim, deoarece nu orice proprietate geometrică se poate exprima prin mijloace algebrice. Lungimea unui arc de curbă, curbura în fiecare punct al ei, tangenta într-un punct la curbă, cu alte cuvinte orice proprietate a unei curbe sau a unei suprafețe din imediata vecinătate a unui punct, aria cuprinsă între două arce de curbă sau aria unei porțiuni de suprafață curbă etc., sînt elemente geometrice pentru stabilirea cărora este necesar să se folosească și elementele *Calculului diferențial și integral*, adică *Analiza infinitezimală*. Ramura din geometrie care folosește și acest instrument de calcul se numește *geometrie diferențială*. Așadar, geometria diferențială studiază figurile geometrice cu ajutorul geometriei analitice și a anali-



B. RIEMANN

zei infinitezimale, însă ea privește proprietățile lor din alt punct de vedere, în mod intrinsec.

— Cum adică intrinsec?

— Adică, cercetează acele proprietăți ale curbelor și ale suprafețelor care nu depind de poziția lor în spațiu, ci sînt legate intim de însăși curba sau suprafața respectivă. În acest sens, Riemann a considerat și spațiile curbe cu n dimensiuni, spații care se numesc azi *riemanniene*. O primă deosebire de spațiile euclidiene cu același număr de dimensiuni apare în expresia *distanței dintre două puncte oarecare* din acest spațiu, expresie care este diferită de aceea care s-a obținut prin generalizarea formulei lui Pitagora, formulă ce caracterizează numai spațiile de curbura nulă. Însăși punctele, a căror distanță trebuie măsurată, nu mai sînt, ca în cazul euclidian, la orice depărtare unul de altul, ci se consideră numai cazul a două puncte infinit apropiate. În această situație, notînd cu $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ coordonatele unui asemenea punct față de un sistem de coordonate, alt-

— Exact și o mențin. Concluzia? În regiuni infinit mici, spațiul riemannian se confundă cu cel euclidian.

— Dacă mă gândesc la sferă, totul mi-e limpede. Geometria pe sferă este o geometrie riemanniană. Aici aleg ca sistem de coordonate cercul ecuatorului și un meridian. Față de acest sistem de coordonate, care nu mai este plan, nici coordonatele x_1, x_2 ale unui punct T nu mai sînt segmente de dreaptă, ci arce de cerc mare, distanța dintre T și vecinul său T_0 va

fi dată de forma aceea pătratică $ds = \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} dx_{ik}}$,

în acest caz, destul de simplu scris și dezvoltat $ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1 dx_2 + g_{22}dx_2^2}$. Acum, n-am decît să-mi închipui că duc planul tangent la sferă în punctul T și consider un sistem de coordonate cartezian, cu originea în punctul de contact T . Coordonatele punctului T_0 sînt proiecțiile pe acest plan ale arcelor de cerc mare ce uneau pe sferă pe T cu T_0 , așadar le-am putea numi dy_1 și dy_2 . Restul e doar o jucărie, fiindcă distanța $T T_0$ este, în acest caz $\sqrt{dy_1^2 + dy_2^2}$.

— Ai făcut o presupunere, în cazul sferei evidentă, dar în general nu, aceea că sfera, adică spațiul riemannian este cufundat într-un spațiu euclidian cu mai multe dimensiuni...

— Ai dreptate, sfera este un spațiu riemannian cu două dimensiuni, iar acela în care am considerat planul tangent la ea este spațiul nostru cu trei dimensiuni! Cred că aceasta este întotdeauna posibil, nu?

— Pe credință nu se poate baza geometria, o știi prea bine, dar te pot încredința că acest lucru a fost demonstrat și anume că un spațiu riemannian cu n dimensiuni se poate totdeauna — cel puțin parțial — cufunda într-un spațiu euclidian cu $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensiuni; în cazul sferei vezi că-i

tocmai pe tocmai. Dar mai este încă ceva, anume că un spațiu riemannian cu n dimensiuni are această caracteristică specifică *de a coincide, într-o regiune infinit mică din jurul fiecărui punct al lui, cu un spațiu euclidian cu același număr n*

de dimensiuni. Acest fapt face posibilă trecerea de la forma riemanniană a distanței la cea euclidiană.

— Înțeleg și aceasta, gândindu-mă la curbura sferei. Numai într-o porțiune infinitezimală, din jurul punctului de contact, planul tangent, așadar spațiul euclidian, poate coincide cu sfera, fiindcă apoi sfera se îndepărtează, din cauza curburii ei, de acest plan. Am impresia că geometria riemanniană cu n dimensiuni este o abstractizare a geometriei euclidiene cu n dimensiuni, aceasta cuprinzându-se ca un caz particular când, cum mi-ai spus, curbura spațiului este nulă. Și cu aceasta cred că procesul de abstractizare din domeniul geometriei a atins apogeul, căci s-a atins generalizarea maximă a noțiunilor geometrice. Nu mă duce mintea să întrezăresc mai departe ce și cum ar mai fi de abstractizat, odată ce punctul geometric a devenit sinonim cu o mulțime, chiar și infinită, de numere algebrice.

— Îmi pare rău că te mulțumești cu atât de puțin. Riemann a știut cum se poate ajunge și mai departe, ba încă, la ce depărtare! Tot în prelegerea despre care am vorbit că a ținut-o în 1854, el a enunțat următoarea părere: „Noțiunea generală de mărime cu mai multe dimensiuni, printre care se află și mărimile geometrice, a rămas complet neformulată. De aceea, eu mi-am propus să construiesc, în primul rând, noțiunea de mărime cu mai multe dimensiuni cu ajutorul noțiunii generale de mărime”.

— Ce vrea să spună cu asta? Că prin coordonatele unui punct s-ar putea înțelege și *altfel de mărimi* decât numai numerele algebrice?

— Desigur! Riemann considera că *orice mulțime continuă de obiecte, de stări sau de fenomene de aceeași natură*, poate fi considerată ca formînd un anumit spațiu în care punctele lui sînt obiectele sau stările sau fenomenele respective, iar coordonatele acelor puncte sînt tocmai mărimile ce determină obiectul sau fenomenul corespunzător. Relațiile dintre aceste obiecte se consideră a fi analoage cu relațiile spațiale, făcîndu-se abstracție de toate celelalte particularități specifice ale mulțimii de obiecte sau de fenomene considerate. Iată-ne ajunși și la noțiunea de *spațiu abstract cu n dimensiuni*!



— Fantastic mai ești matală, măi bădiță Teodor. Am ajuns la ea când nici nu mă așteptam, exact așa cum făceai odinioară în plimbările noastre prin pădure, mă scoteai dintr-o dată undeva unde nici nu visam! Am înainte, așadar, alt gen de abstractizare, prin *generalizarea obiectului geometriei*. Cred că despre aceste lucruri am putea vorbi o săptămână întreagă.

— Nu, n-am termina nici într-o lună, nici într-un an, numai că eu nu ți-aș putea ține tovărășie. Pe aceste probleme le privesc adesea ca pe-un stol de cocori, ce apucă „întinsele și necuprinsele drumuri de nori”.

— Dar dacă stau și mă gândesc și eu oleacă mai bine, mi se pare că geometria matală se joacă cu abstracțiile ca pisica cu șoarecele. Întâi ajunge la noțiunea de spațiu abstract și după aceea se apropie, așa pe nesimțite, de fenomenele sau obiectele din spațiul real, considerându-le ca puncte ale sale. După aceea, tiptil-tiptil, înșfacă și înghite spațiul real, fiindcă relațiile și stările dintre fenomenele considerate există cu adevărat și se petrec cu adevărat în spațiul real! Așadar, spune-mi, e vorba de un spațiu abstract sau de un spațiu real la care ajung prin aceste complicate procedee de abstractizare?

— Nu știu să-ți răspund la întrebare decât indirect, arătându-ți că geometriile abstracte multidimensionale au o aplicație practică atât în matematici cât și în fizică, tehnică și în alte științe, intervenind ca o metodă intuitivă pentru studiul mărimilor ce depind de 2, 3 sau n parametri.

— Bine, să te văd. Începe cu un exemplu din matematică. Nu vreau să rîd de tine, cerîndu-ți să-mi dai un exemplu chiar din geometrie!

— Nu te-ngriji de asta! Știi că eu am ce am cu proverbele și este unul cu cine rîde la urmă! Drept care să ne oprim la geometrie și din ea să alegem un elipsoid. Cunoști acest corp. Acum să vedem de câți parametri depinde el. Mai întîi poziția centrului său, așadar cele trei coordonate spațiale ale unui punct, apoi de mărimea semiaxelor lui, trei la număr, adică în total un elipsoid din spațiul nostru cu 3 dimensiuni depinde de 6 parametri. Acești parametri pot varia, după cum

Îți imaginezi ușor, în mod continuu și deci ei pot constitui elementele din care să apară un spațiu abstract cu 6 dimensiuni, în care se consideră elipsoizii ca puncte ale lui. Orice relație voi stabili între punctele acestui spațiu, relații ce se scriu sub formă de ecuații, aceste ecuații reprezentând curbe, suprafețe, distanțe etc. vor demonstra o anumită proprietate a elipsoizilor, proprietate ce are prin însăși expresia ei o anumită formă intuitivă. Așa, la rezezeală, ai putea, de exemplu, stabili că în spațiul nostru există ∞^6 elipsoizi deși nu există mai mult de ∞^3 puncte. Acum, alt exemplu din chimie. Să zicem că se studiază un amestec de 4 gaze. Starea acestui amestec depinde de concentrarea procentuală a fiecărui gaz, ceea ce înseamnă 3 parametri, apoi de temperatura și de presiunea amestecului, așadar, de 5 parametri, independenți între ei și care variază în mod continuu. Ei pot fi priviți drept coordonatele unui punct din spațiul cu 5 dimensiuni, spațiu ce se va numi *spațiul fazelor* sistemului gazos considerat. Procesele ce se petrec în sistemul considerat, atunci când unul sau mai mulți dintre acești parametri variază în mod continuu, se vor reprezenta prin diverse curbe sau suprafețe situate în acest spațiu cu 5 dimensiuni și studiul, din punct de vedere geometric al acestora, va traduce în limbajul chimic fenomenele de așteptat să aibă loc. Dar dacă vrei să mă întorc la matematici, află că una dintre cele mai moderne ramuri ale matematicilor este *Analiza funcțională* unde se studiază, printre multe altele și mulțimile de funcții de un anumit tip, drept puncte ale unui *spațiu funcțional*. Într-un asemenea spațiu funcțional proprietățile funcțiilor se definesc numai prin relațiile lor unele față de altele, de pildă prin *distanța* dintre ele. Dar, ca să nu bănuiești că am luat-o razna, uite că mă întorc spășit la geometriamamă să caut în ea surse de abstractizare!

— După ce ai stors-o ca pe o lămâie, ce vrei să mai iei din ea? Ori ai de gând să-i tai și coaja-n bucăți?

— Parcă am fi fost gând în gând, că de inimă-n inimă nu mă-ndoiesc! Taman așa am să procedez. Am de gând să-ți dau exemple de geometrii, de sine stătătoare, ce s-au format prin abstragerea unor anumite proprietăți studiate în geo-

metria euclidiană și dezvoltându-le pe acelea, nici nu au mai pomenit de rest. De pildă, pornind de la proprietățile proiecțiilor.

— Știu că problema proiecțiilor și a perspectivelor a interesat mult pe pictorii și arhitecții din Renaștere. Am vorbit despre acestea și altădată, însă întotdeauna mi-am închipuit că proiecțiile sînt un capitol din geometria euclidiană.

— A fost, dar nu mai este! În 1822 a apărut o carte, scrisă pe matematicianul francez V. Poncelet, avînd ca titlu *Proprietățile proiective ale figurilor* și atunci matematicienii au constatat că proprietățile geometrice ce se păstrează prin proiecția centrală sînt atît de numeroase și de interesante, încît pot forma obiectul unui studiu independent de celelalte proprietăți geometrice ale figurilor. S-a creat astfel un domeniu nou numit *geometrie proiectivă*, în care se consideră că figurile geometrice nu au alte proprietăți decît cele proiective. Spațiul, abstract desigur, în care se află punctele, dreptele, planele sau hiperplanele, dacă numărul dimensiunilor este mai mare decît trei, se numește *spațiu proiectiv*. În mod analog, există un *spațiu afin* corespunzător *geometriei afine* care cercetează proprietățile figurilor geometrice ce se păstrează cînd coordonatele (x, y) ale punctelor lor se transformă liniar, adică după formulele:

$$\begin{aligned}x &= ax_1 + by_1 + c \\ y &= dx_1 + ey_1 + f.\end{aligned}$$

— Dar de ce se numește *geometrie afină*? Știu că în latinește *affinis* înseamnă *înrudire*, aici despre ce înrudire poate fi vorba?

— A figurilor ce suferă această transformare a punctelor lor. O transformare liniară schimbă o elipsă tot într-o elipsă, o pereche de drepte paralele în altă pereche de drepte paralele și așa mai departe, adică le schimbă chiar în *figuri înrudite* cu acelea de la care s-a pornit.

— Și cum se explică aceasta?

— Prin aceea că o transformare a coordonatelor unui punct corespunde la o deplasare a punctului față de sistemul de axe respectiv iar schimbarea liniară a coordonatelor puncte-

lor unei figuri înseamnă întâi o deplasare a figurii, așa cum este ea, dintr-un loc în altul, în așa fel ca să rămână simetrică față de un plan, și apoi, o contractare sau o dilatare a ei într-un anumit raport și numai în direcția axelor de coordonate. Ți-am vorbit numai de două dintre geometriile abstrase din geometria euclidiană, mai sînt însă și altele ca: *geometria compasului*, *geometria riglată*, *geometria triunghiului*...

— Cînd am văzut în biblioteca ta cartea lui Traian Lalescu intitulată *Geometria triunghiului*, nu am crezut nici o clipă că titlul corespunde unei realități, mă gîndeam că a fost pus așa, mai mult simbolic.

— Să nu crezi că ai greșit. Pe la începutul secolului trecut toate aceste geometrii, și altele, încă duceau o existență clandestină. Actele lor de identitate au fost eliberate abia în 1872 de către matematicianul german Felix Klein ca urmare a *Programului de la Erlangen*.

— Cum adică *program*? Ce fel de program?

— Acesta a fost numele ce s-a dat prelegerii inaugurale pe care a ținut-o în acel an Felix Klein numit atunci, la vîrsta de numai 23 de ani, profesor la Universitatea din Erlangen. Subiectul prezentat a fost o surpriză în lumea matematicienilor, fiindcă el a tratat conținutul geometriilor din punctul de vedere al teoriei grupurilor, încercînd chiar o clasificare a lor, fapt ce poate fi privit ca un nou proces de abstractizare a noțiunii de geometrie.

— Știam că teoria grupurilor a fost introdusă de Evariste Galois, în prima jumătate a veacului al XIX-lea în legătură cu rezolvarea ecuațiilor algebrice și nu avea nimic comun cu geometria.

— Asta era pe vremea bunicii. Mai tîrziu, teoria grupurilor a depășit domeniul ecuațiilor algebrice găsind aplicații și în alte domenii. Printre alții, matematicianul scandinav Sophus Lie a creat teoria grupurilor continue de transformări, grupuri ce au putut fi puse în legătură cu proprietățile figurilor geometrice. Felix Klein a introdus noțiunea de *grup de deplasări în spațiu* și a arătat că „proprietățile geometrice nu se modifică prin transformările grupului principal al deplasărilor din spațiu. Reciproc, proprietățile geometrice



F. KLEIN

se caracterizează prin invarianța lor față de transformările grupului principal“.

— Ce se înțelege prin „transformările grupului principal al deplasărilor“? Bănuiesc că trebuie să fie formulele de transformare a coordonatelor unui sistem în altul, dar nu sînt sigur că-i așa.

— Da, formulele de transformare a coordonatelor pot fi interpretate ca definind mișcări ale planului sau spațiului întreg și, întrucît relațiile ce definesc aceste transformări biunivoce ale punctelor unele în altele sînt funcții continue de coordonatele punctului, se dovedește că ele formează un grup continuu de transformări, lăsînd neschimbată figura asupra căreia a fost aplicată, deoarece acest grup păstrează distanțele dintre două puncte și unghiul dintre două drepte. Un grup inclus în grupul principal este, de pildă, format din mișcările de rotație în jurul unui punct. Felix Klein a stabilit astfel că orice geometrie euclidiană sau neeuclidiană se poate caracteriza printr-un anumit grup de transformări biunivoce

ale punctelor spațiului geometriei respective. De pildă, grupul transformărilor punctuale biunivoce care păstrează distanțele și unghiurile, adică lasă neschimbate simetriile figurilor în raport cu o dreaptă sau un plan, caracterizează *geometria euclidiană*. Dar mai sînt și geometrii cărora le corespund transformări ce nu folosesc întreaga mulțime a punctelor din plan sau din spațiul tridimensional. Așa, de pildă, este grupul transformărilor punctuale care lasă neschimbate *proprietățile proiective* ale figurilor, cu alte cuvinte, orice sistem de puncte situate pe o dreaptă; acesta caracterizează *geometria proiectivă*.

— Drept să-ți spun că pentru mine, oricît mi-ai spune tu că-i altfel, geometria proiectivă nu-i altceva decît un capitol mai dezvoltat al geometriei euclidiene și nu o geometrie *independentă* de ea!

— Treaba ta să crezi cum vrei. Am să-ți dau atunci un exemplu de o geometrie ce se caracterizează printr-un grup de transformări biunivoce astfel că, aplicate punctelor unei figuri, să nu se mai păstreze din figură altceva decît continuitatea ei și configurația punctelor.

— Cum adică? Un cerc să nu mai rămînă un cerc?

— Nu! Un cerc poate să se schimbe într-o elipsă, într-un triunghi, în conturul unui elefant, adică a oricărei figuri care rămîne închisă, cu singura condiție că dacă trei puncte A , B , C de pe conturul lui erau așa ca B să fie între A și C , această configurație să rămînă așa, sau dacă un punct O era în interiorul cercului, după transformare O să fie tot în interior. Asemenea transformare se numește *topologică*, iar geometria corespunzătoare *topologie*.

— Parcă mi-ai mai vorbit tu despre topologie! Nu-i oare geometria aceea de pe un plan de gumă, pe care-l pot întinde în lung și-n lat cu condiția să nu-l îndoi sau să nu-l tai?

— Da, în cazul topologiei plane. În cazul topologiei spațiale, ar fi vorba de o figură în spațiu, avînd proprietăți elastice, pe care o poți deforma oricum fără să o rupi, să o tai și să o lipești din nou.

— În acest caz ai dreptate să afirmi că Felix Klein a trecut pe o treaptă mai înaltă de abstractizare a noțiunii de geometrie, căci el o reduce la studiul proprietăților ce rămân invariante la anumite grupuri de transformări. Dar, rogu-te, prin aceasta nu se întoarce oare la Descartes?

— De întors nu se întoarce, ci întâlindu-l, îl depășește. El trece mai departe, pe drumul deschis de Riemann, înspre o concepție mai largă a geometriei și a spațiului geometric.

— Mă mir însă că nu ai pomenit nimic despre grupul de transformări ce caracterizează o geometrie riemanniană?

— Nu ți-am vorbit despre ele fiindcă transformările, așa cum le-a conceput Felix Klein, nu există. Spațiile riemanniene se deosebesc esențial de acelea euclidiene sau neeuclidiene, prin *curbura lor*, ele nu mai au acea omogenitate a spațiilor despre care ți-am vorbit, care să permită unui punct să se miște liber dintr-un loc în altul. E ca și cum acestei mișcări i s-ar opune niște forțe și punctul ar trebui să le înfrunte.

— Înțeleg asta destul de bine. De exemplu, noi ne putem plimba pe dușumeaua acestei odăi, pe care o consider ca o porțiune din suprafața Pământului, pe care iar îl consider ca un spațiu riemannian cu două dimensiuni, fiindcă sintem supuși mereu forței gravitaționale. Dacă am fi însă într-un vehicul cosmic și am ajunge în zona în care nu se mai exercită forța gravitațională, nu ne-am mai afla pe o suprafață riemanniană și n-am mai putea circula cu precizia de aici.

— Da, s-ar putea interpreta și așa. Oricum, problema deplasărilor în spațiile riemanniene nu o mai putem discuta noi doi. Însă, ca să nu rămâi decepționat, am să-ți spun că matematicienii nu au părăsit așa, cu una cu două, frumoasa idee a lui Klein de a lega geometria de grupul ei de transformări. Problema pusă de el a fost generalizată și astfel s-a ajuns la concepția unor spații mai generale decât spațiile lui Klein, numite *spații cu conexiune euclidiană*. Autorul lor a fost Elie Cartan și se numesc azi *spațiile Cartan* și asta ca să se deosebească de alte spații, concepute de M. Fréchet într-un mod și mai abstract. Anume, un asemenea spațiu abstract este definit printr-o mulțime de puncte legate printr-un număr nenegativ numit *funcție de distanță*, care satis-

face anumite relații. Ca un caz particular al acestor spații *Frechét*, apar *spațiile euclidiene cu n dimensiuni*, dacă punctele sînt definite prin n coordonate și distanța prin formula lui Pitagora generalizată. Dacă în aceste spații nu se ține seama de distanță, atunci avem de-a face cu *spațiile topologice* și care, la rîndul lor, nu-s decît un alt aspect al teoriei mulțimilor. Sînt și spații cu o infinitate de dimensiuni, cea mai simplă clasă a lor fiind numite *spații Hilbert*, și multe altele.

— Rău ne-am mai rătăcit, dragă bădăie Teodor! Am pornit, ca oamenii, de la cele mai simple și caracteristice elemente ale geometriei: punct, linie, suprafață și cutreieram cuminiți plaiurile geometriei cînd, deodată, ne-am lăsat ademeniți de năstrușnica ceea de abstracție și iată că ne-am trezit pe domeniile nesfîrșite ale teoriei mulțimilor! Cum să-i mai zici *geometrie* unui spațiu cu un număr infinit de dimensiuni?

— De fapt nu i se zice *geometrie* decît în virtutea inerției și fiindcă matematicienilor le place uneori să păstreze vechile numiri intuitive și să gîndească în scheme geometrice. Acestea sînt spații funcționale și fac parte din *Analiza funcțională* sau din *Topologia abstractă*.

— S-a întîmplat cu geometria ce s-ar întîmpla cu picătura asta de cafea ce s-a prelins pe marginea farfurioarei. Dacă mi-o închipui împărțită, tot mai mult și mai mult, ajung la moleculă, apoi la atom, apoi la electroni care numai cafea nu mai este! Mă întreb la ce surprize ne-am putea aștepta dacă ne-am lăsa ademeniți de abstracție și în cazul cînd am porni de la numărul întreg pe care s-a clădit aritmetica? Punctul geometric s-a preschimbat într-o mulțime infinită de numere, ba și mai rău, dar numărul? Numărul, pe care-l cîntă și Eminescu, cu admirație? Ți-aduci aminte:

„Precum Atlas în vechime sprijinea cerul pe umăr

Așa el sprijină lumea și vecia într-un număr“!

— Bătrînul dascăl al lui Eminescu o putea face atunci, fiindcă el mai aparținea secolului al XIX-lea. Matematicianul de azi însă nu mai poate afirma aceasta, fiindcă el nu mai știe bine ce este un număr!

— Cum așa? Ce vrei să insinuezi?

— Nu insinuez nimic. Ai spus că vrei să urmărești calea ce ți-o indică abstracția și eu am anticipat. Uită însă ceea ce ți-am spus și hai să căutăm mai întâi noțiunea de număr întreg.

— Nu mă mai amăgi! Nimeni, niciodată nu va putea ști cum s-a ajuns la noțiunea de număr. De aceea, se admite că numărul întreg a fost conceput *pe două căi diferite*: ca simbol al unei mulțimi de obiecte distincte, adică *număr cardinal* și ca locul ocupat de un anumit obiect, dintr-un șir de obiecte puse într-o anumită ordine, adică *număr ordinal*.

— Perfect răspuns, dar abstracția îmi face semn că nu-i mulțumită! Și cred că are dreptate fiindcă, deși aceste două feluri de numere ar putea fi concrete: să spunem că ar fi vorba de 7 mere sau de al șaptelea măr, aceste două mărimi concrete presupun că au la activul lor un serios proces de abstractizare!

— Dacă mă gândesc bine, văd că ai dreptate. Nu știu nici dacă cele 7 mere, sau cel de al șaptelea măr, sînt mici sau mari, sînt coapte sau verzi, dulci sau îți fac gura pungă, bune sau putrede și o mulțime de alte calități de care s-a făcut abstracție, păstrîndu-se numai calitatea de măr. Dacă se face abstracție și de ea, atunci sîntem chiar în domeniul *numerelor abstracte*.

— Nu încă. Adevărata abstractizare a noțiunii de număr s-a petrecut abia atunci cînd omul a inventat cifrele, adică *a notat numerele cu cîte un semn*. Prin scris, numărul a fost despuiat de orice calitate fizică și a devenit *o idee abstractă*, reprezentată printr-un *simbol*. Acest simbol — cifra — e singurul mijloc prin care un număr se deosebește de altul și care, totodată, îi stabilește locul în ordinea naturală a numerelor, cifra e singura lui identitate. Căci dacă numărul 3 sau 5 mai păstrează o semnificație concretă, numărul 54 387 nu mai are nici una. Și mai este ceva: în domeniul gândirii abstracte se ivesc mereu noi posibilități de construire, prin legătura ce se poate stabili între diferite noțiuni abstracte. Oamenii nu au numărat, dar au și măsurat. De la noțiunea abstractă de număr întreg s-a ajuns astfel la altă noțiune abstractă, aceea de *număr fracționar* ca raport dintre două

— Nu insinuez nimic. Ai spus că vrei să urmărești calea ce ți-o indică abstracția și eu am anticipat. Uită însă ceea ce ți-am spus și hai să căutăm mai întâi noțiunea de număr întreg.

— Nu mă mai amăgi! Nimeni, niciodată nu va putea ști cum s-a ajuns la noțiunea de număr. De aceea, se admite că numărul întreg a fost conceput *pe două căi diferite*: ca simbol al unei mulțimi de obiecte distincte, adică *număr cardinal* și ca locul ocupat de un anumit obiect, dintr-un șir de obiecte puse într-o anumită ordine, adică *număr ordinal*.

— Perfect răspuns, dar abstracția îmi face semn că nu-i mulțumită! Și cred că are dreptate fiindcă, deși aceste două feluri de numere ar putea fi concrete: să spunem că ar fi vorba de 7 mere sau de al șaptelea măr, aceste două mărimi concrete presupun că au la activul lor un serios proces de abstractizare!

— Dacă mă gândesc bine, văd că ai dreptate. Nu știu nici dacă cele 7 mere, sau cel de al șaptelea măr, sînt mici sau mari, sînt coapte sau verzi, dulci sau îți fac gura pungă, bune sau putrede și o mulțime de alte calități de care s-a făcut abstracție, păstrîndu-se numai calitatea de măr. Dacă se face abstracție și de ea, atunci sîntem chiar în domeniul *numerelor abstracte*.

— Nu încă. Adevărata abstractizare a noțiunii de număr s-a petrecut abia atunci cînd omul a inventat cifrele, adică *a notat numerele cu cîte un semn*. Prin scris, numărul a fost despuiat de orice calitate fizică și a devenit *o idee abstractă*, reprezentată printr-un *simbol*. Acest simbol — cifra — e singurul mijloc prin care un număr se deosebește de altul și care, totodată, îi stabilește locul în ordinea naturală a numerelor, cifra e singura lui identitate. Căci dacă numărul 3 sau 5 mai păstrează o semnificație concretă, numărul 54 387 nu mai are nici una. Și mai este ceva: în domeniul gândirii abstracte se ivesc mereu noi posibilități de construire, prin legătura ce se poate stabili între diferite noțiuni abstracte. Oamenii nu au numărat, dar au și măsurat. De la noțiunea abstractă de număr întreg s-a ajuns astfel la altă noțiune abstractă, aceea de *număr fracționar* ca raport dintre două

numere întregi și apoi, la noțiunea de *număr irațional*. Meritul cel mare al egiptenilor sau al babilonienilor este că au generalizat noțiunea de număr, adăugînd la mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor fracționare sau aceea a numerelor iraționale, pe care le deosebeau de numerele întregi prin faptul că erau însemnate prin cifre speciale. Din acest punct de vedere ei i-au întrecut pe greci, fiindcă au intuit *în mod naiv*, cum spune N. Bourbaki, noțiunea de *număr real*, pe cînd grecii au rămas numai la concepția de *număr întreg*, privind numerele fracționare și cele iraționale ca *mărimi* geometrice sau fizice, dar nu ca numere. Egiptenii au folosit un sistem de numerație zecimal și aveau semne speciale pentru fiecare dintre unitățile de diferite ordine, de la 1 la 10^7 . Babilonienii, pe lîngă sistemul zecimal, au mai avut un altul, sexagesimal.

— Da, știu. Mai mult chiar, dacă pentru a scrie un număr în sistemul zecimal, alăturau, ca și egiptenii, semnele pentru unități, zeci etc., în cazul sistemului sexagesimal a fost stabilită o notație care se aseamănă cu a sistemului nostru pozițional, adică un același semn putea reprezenta unități de diferite ordine, valoarea lui depinzînd de poziția semnului în număr. Dar mi se pare că nu-l aveau pe zero?

— Nu, invenția lui zero și deci a adevăratului sistem pozițional rămîne titlul de glorie al matematicienilor hinduși, chiar dacă sugestia lui le-a venit din cîmpia Mesopotamiei. Ei au introdus pe zero nu numai ca simbol al nimicului, ci și ca număr.

— Atunci au mai urcat o treaptă înspre abstractizarea noțiunii de număr!

— Desigur. Însă, dacă babilonienii nu au ajuns pînă la noțiunea lui zero, au sărit în schimb, nu se știe cum și cînd, peste o adevărată prăpastie, adică au trecut din domeniul aritmeticii în acela al algebrei. Din lipsă de texte nu se poate ști cît de departe au pătruns egiptenii în acest domeniu, dar babilonienii gîndeau pînă și problemele de geometrie sub forma abstractă a algebrei, înainte de a stabili rezultatul cerut de ele. Ei știau să rezolve ecuațiile de gradul I, II și chiar unele ecuații de gradul III sau transcendente, deși nu

au inventat nici un simbol pentru notarea necunoscutei. Seriau *cuvîntul* ce reprezenta necunoscuta, dar îi dădeau o semnificare simbolică, adică abstractă. În Europa se va ajunge la această treaptă de abstractizare abia peste vreo 30 de veacuri, cu alte cuvinte pe la începutul secolului al XVI-lea.

— Mi se pare că în veacul al XVI-lea numerele negative abia apăreau!

— Da, dar nu au fost recunoscute de către toți matematicienii, nici chiar de către Viète, care a introdus literele în locul numerelor și a pus astfel bazele algebrei moderne.

— Însă Cardan arată că o ecuație poate avea rădăcini negative. Mi se pare că el le numea rădăcini cu *minus pur* ca să le deosebească de rădăcinile complexe conjugate, pe care le numea cu *minus sofisticat*, nu-i așa?

— Da, totuși pentru Viète, numerele erau *numai pozitive*, el nu a putut să conceapă această generalizare a noțiunii de număr, deși a putut ajunge la noțiunea *unui calcul generalizat*, cu *litere ținînd locul numerelor*. De-abia în secolul următor, René Descartes, care a perfecționat opera lui Viète, a stabilit noțiunea de *număr algebric*, adică de număr însoțit de semnul $+$ sau $-$, noțiune care a impus și introducerea unei alte noțiuni, aceea de *valoare absolută și relativă* a unui număr. El a arătat cum se poate stabili, fără a rezolva o ecuație, care este numărul rădăcinilor ei pozitive, a celor negative și a recunoscut că există *rădăcini* de forma $a + bi$, a și b fiind numere reale, iar $i = \sqrt{-1}$. Pe acestea le-a numit *imaginare* din cauză că asemenea numere nu se puteau reprezenta în mod grafic în planul sistemului de coordonate, dacă a și b ar fi fost presupuse a fi abscisa și respectiv, ordonata unui punct.

— Ai spus că Descartes considera că expresiile de forma $a + bi$ pot fi rădăcini ale ecuațiilor, aceasta nu-i tot una cu a le admite existența ca *numere complexe*?

— Desigur că nu! Mai întîi fiindcă însuși noțiunea de număr nu era clarificată. Cei mai mulți priveau numărul ca un *raport* și nu ca o mulțime de unități. Această concepție a fost pusă la punct mai întîi de Descartes și apoi de Newton. Și numerele negative erau privite cu neîncredere fiindcă nu



puteau explica regula înmulțirii lor. Dar Descartes le-a acceptat, adică a folosit numerele complexe, ca pe un rău necesar! Chiar și mai târziu, ele au fost acceptate de Leibniz, de Moivre care a stabilit o formulă celebră ce-i poartă numele, formulă ce stabilește în mod intuitiv mecanismul ridicării la putere și deci și al extragerii de rădăcină de orice ordin, dintr-un număr complex. Euler introduce notația $\sqrt{-1} = i$, Wessel stabilește reprezentarea lor geometrică pe care o redă și Argand în primii ani din secolul al XIX-lea dar, *cu toate acestea*, numerele complexe trec numai drept un mijloc interesant și comod de calcul! Abia Gauss, și apoi Cauchy au avut cuvântul hotărâtor și de atunci ele *sînt considerate* ca numere. Gauss a arătat mai întâi că aceste numere complexe sînt o extensiune a numerelor reale cum au fost și acelea care au condus de la numerele întregi la fracționare și de la numerele pozitive la negative.

— A mai rămas încă o problemă de dezlegat! Rezolvarea ecuațiilor algebrice dădea pe atunci multă bătaie de cap

matematicienilor fiindcă nu se puteau găsi formule cu radicali, prin care să se rezolve ecuațiile algebrice de grad mai mare decât patru, așa cum existau pentru cele de gradele II, III și IV!

— Ai dreptate. Abia în 1824, Niels Abel a demonstrat că este imposibil să se rezolve prin radicali ecuațiile algebrice generale de gradul 5 sau mai mare. Aceasta înseamnă că rădăcinile lor nu se mai puteau exprima printr-un număr finit de operații aritmetice și de extrageri de rădăcină, efectuate cu coeficienții acestor ecuații.

— Cu alte cuvinte, i-a făcut să vadă că habar n-aveau despre natura numerelor iraționale, închipuindu-și despre ele că se pot exprima numai prin radicali, sau printr-o combinație, în număr finit, de operații de acest fel.

— Ți-am mai spus și altădată, și de aceea nu insist, că pornind de la teoria grupurilor, introdusă de Evariste Galois, studiul ecuațiilor algebrice a luat o altă direcție: S-au descoperit astfel întregii algebrici de ordinul n , numerele algebrice de ordinul n și numerele transcendente care nu mai satisfac nici o ecuație algebrică. Acestea sînt numai unele înfățișări ale numărului, stabilite de matematicienii din secolul al XIX-lea prin cercetarea ecuațiilor algebrice și nealgebrice. Dar alte probleme din matematici, matematici aplicate sau fizică, au condus și la descoperirea unor noțiuni mai generalizate despre numere, ca de pildă quaternionii, numerele transfinite, matricele și altele despre care, drept să-ți spun nu am nici un chef să-ți vorbesc acum. Ți le-am enumerat numai ca să-ți faci o idee de aspectul complex al noțiunii de număr, așa cum se prezenta el matematicienilor de la începutul veacului nostru, ca să-ți dai seama de ceea ce-i aștepta pe matematicienii ce-și propuneau să răspundă la întrebarea „ce este numărul?” Acesta este numai un aspect, dar mai este și altul. Imposibilitatea rezolvării ecuației de gradul V prin radicali, nu a dus numai la lărgirea și precizarea noțiunii de număr irațional, ci și la crearea unui nou domeniu de cercetare, anume *Algebra abstractă*.

— Nu ți se pare un pleonasm? Algebra nu-i oare prin definiție cea mai abstractă ramură a matematicilor?

— Este, dar asta nu a împiedicat-o să urce înspre alte culmi ale abstractizării: Mai întâi, prin introducerea notațiilor literale, algebra a depășit nivelul inițial la care își propusese să rezolve doar ecuațiile de gradul I și II sau eventual unele ecuații mai complicate, în numere absolute. Ea a devenit astfel o *teorie a calculelor literale* și după aceea, când s-a aflat o metodă generală de rezolvare a ecuațiilor de gradul III și IV, algebra și-a schimbat din nou profilul, ocupându-se de metode de rezolvare a ecuațiilor algebrice. Apoi din nou, noțiunea de *grup* a condus la abstractizarea noțiunii de *operație algebrică*. În grup, operația prin care se ajunge de la două elemente ale lui la un al treilea nu mai este *specificată*, nu-i nici adunare, nici înmulțire, ci *altceva*, este pur și simplu o *compunere*, o *operație* și atât, o operație care depinde de *structura grupului*. Noțiunea de *structură* apare astfel ca un nou instrument al gândirii care abstractizează însăși legea de compunere algebrică, aplicându-se la elemente care nu au decît vagi analogii cu numerele. Însă, cred că am vorbit destul, să mai facem și o pauză!

— Fie. Cele ce mi-ai spus mă fac să-i dau dreptate, mai mult ca oricînd, lui Platon. Spunea el odată că „adevărul matematic există într-o lume independentă de om și mintea recunoaște aceste adevăruri prin contemplare“. Ce crezi, a nimerit-o?

PROBLEMA AXIOMATIZĂRII MATEMATICILOR ELEMENTARE

sau

O POVESTE CU JOCUL DE ȘAH

Întorcându-mă din piață, o mașină a oprit brusc lângă mine, cu un scrîșnet de parcă s-ar fi ferit să nu calce pe cineva. M-am uitat curios să văd ce s-a întâmplat, și când colo, la volan îl văd pe fostul meu coleg de liceu, Paulică, pe care nu-l mai văzusem de mulți ani.

— Ce faci aici, măi băiete? m-a întrebat el îmbrățișându-mă.

— Nimic de seamă, am venit la un prieten de-al meu care locuiește aici, dar tu?

— Eu? Am venit să-mi petrec duminica aici în liniște, fiind sigur că nu voi întâlni nici o cunoștință, dar dacă ai ghinion, ai și pace!

După acest schimb de „amabilități” care ne-a dovedit că am păstrat intacte legăturile noastre sufletești l-am invitat pe colegul meu de odinioară la masă, știind bine că prietenul meu, Teodor Solonar, va fi foarte bucuros de oaspeți.

Și chiar așa a fost, Paulică fiind o fire deschisă, veselă și amabilă. După masă, discuția a alunecat către rezultatele campionatelor de șah, și părea să se stabilească în această direcție, deoarece șahul rămăsese pasiunea colegului meu, iar lui Teodor Solonar, problema nu-i era străină. Ca să-mi zădăresc prietenul, la un moment dat i-am spus:

— Ei, de data aceasta ți s-a înfundat și matale, bădiță Teodor! Azi ne apucăm de șah că nu prea văd eu cu ce rocadă ai putea aduce discuția pe făgașul matale!

Teodor Solonar a izbucnit în râs, iar Paulică se uita foarte curios la noi. De aceea m-am adresat lui:

— Trebuie să știi că, de când am venit aici, prietenul acesta al meu mă îndoapă cu probleme de matematici. Or, azi, datorită ție, am să răsflu mai ușurat!

— Ei, asta-i bună! a spus Paulică. Drept să vă spun, mă prinde mirarea căci nu înțeleg ce puteți discuta dumneavoastră cu colegul meu când, la școală, el nu făcea alta decât să frunzărească la matematică, toate gândurile fiindu-i concentrate la istorie și la minunile antichității!

— Te înșeli amarnic, dragă Paul, colegul matală este acum un admirator pasionat al matematicilor. L-aș asemui fără să greșesc, cu Paul Valéry, care s-a recomandat într-o scrisoare ca fiind „un nefericit îndrăgostit de cea mai frumoasă dintre științe”. Această nouă pasiune a lui ne-a și legat printr-o prietenie trainică și care, oricum, de aici înainte nu mai are când să se rupă...

Cred că Paulică a simțit melancolia din aluzia lui Teodor Solonar după grija cu care a căutat să nu se dea în vileag, când mi-a spus:

— Va să zică, tot de șotii te ții acum la bătrînețe! Ai reușit să-l amăgești și pe bădia Solonar că te pricepi la matematici! V-aș ruga mult, dragă bădiță, dacă ați vrea, să mă faceți părtaș la o asemenea discuție, ca să vi-l demasc eu!

— Îi fi poftind tu, măi Paulică, dar află că prietenul meu are subiecte preferate, și când vin eu aici sau când se rătăcește el pe la Iași, face ce face și mi le prezintă ca „fabricate ad-hoc”. De aceea i-am și spus eu ceea ce i-am spus mai înainte și cred că m-a înțeles el foarte bine! Nu-mi vine să cred că minunea acestei *fabricații spontane* s-ar putea repeta și acum, legînd subiectul de o partidă de șah, fiindcă altfel n-ar mai avea nici un haz!

Amîndoi mă priveau amuzați. Când a răspuns, lui Teodor Solonar îi sclipeau ochii și am citit în ei că hărțuiala a prins:

— Atunci, te întreb eu pe mata, dragă Paulică, ce-ai spune dacă am încerca să asemuim matematica cu jocul de șah, cu niște partide de șah?

— Știu eu? Nu prea cred că se poate, deși o partidă de șah pune uneori probleme foarte serioase!

— Și de ce crezi că nu se poate?

— De! Într-o partidă de șah, problemele sînt legate numai de configurația pieselor de pe tabla de șah: pioni, nebuni, cai, rege, regină, turnuri — piese ce sînt obligate să se miște

după anumite reguli dinainte stabilite, pe cînd în matematici avem de-a face cu teoreme legate de numere, expresii algebrice, ecuații algebrice sau de anumite figuri geometrice formate din puncte, linii, suprafețe, volume... Asemenea obiecte matematice înseamnă cu totul altceva decît piesele jocului de șah, ele au o semnificație precisă de care trebuie să ținem seama. Așa că, oricît de drag mi-ar fi jocul de șah, nu pot admite semnul de egalitate între aceste două domenii!

— La drept vorbind, sînt și eu de aceeași părere, dar din alte motive, pe care am să ți le arăt mai tîrziu și te rog să-mi amintești despre asta. Acum însă vreau să susțin teza contrară.

— Atunci totul va fi o simplă glumă, nu o discuție serioasă?

— Din contra, o discuție foarte serioasă și documentată!

— Cred că așa ceva este imposibil, a adăugat colegul meu, complet dezorientat și dezamăgit de întorsătura ce a luat-o discuția.

— Ba, măi Paulică, să știi că-i posibil dacă o spune șeful! Uite, vezi, cît ai zice „hocus-pocus” va apare aici pe masă un caiet cu notițe și gata, nu mai scăpăm! Ba, ca să ne arunce praf în ochi, se va duce să ne facă mai întîi cîte o cafea!

— Nu-ți închipui cîtă bucurie mi-a făcut Paul aducînd vorba despre șah. Nici prin gînd nu-mi trecea că va veni vremea să atacăm, pe îndelete și chiar în trei, minunata problemă a axiomatizării matematicilor elementare, așa cum a fost pusă de către David Hilbert în ultimul an al veacului trecut, atunci cînd a publicat cartea devenită celebră, *Despre bazele geometriei*.

— Bădie Solonar, drept să vă spun, acum nu mai înțeleg chiar nimic! Cum? Vreți să discutăm *împreună*, *acum* și *aici*, problema axiomatizării matematicilor? Cred că e o glumă, fiindcă eu nu mă simt în stare să iau parte la o asemenea discuție, este o problemă extrem de dificilă și, după cîte știu, nici măcar nu-i închisă!

— Da, ai dreptate, problema este cam cu spini și a rămas deschisă. Dar, să aducem mai întîi cafelele, aici pe masă.



După laudele aduse cafelei, Paulică și cu mine așteptam să vedem ce va urma. Neavînd răbdare, am observat:

— Văd că ai adus nu numai un caiet, ci și o carte, cu un titlu destul de ademenitor: *Matematica și viața*. Are vreo legătură cu discuția noastră sau ai adus-o aici numai de frumusețe și ca să-mi impresionezi colegul?

— Are să aibă, altfel ce ar căuta aici? Autorul, fostul academician Simion Stoilov, pe care am avut bucuria să-l cunosc și să-l aud vorbind, a publicat, în anul 1947, un articol cu titlul *Gîndirea axiomatică în matematica modernă* care se află în această culegere, tipărită după moartea sa.

— Am și eu această carte și chiar am citit din ea cîteva articole, printre care acela despre Gheorghe Țițica sau acela despre Simion Sanielevici, pentru care am avut o deosebită admirație. Deși nu i-am fost student, am asistat de multe ori la cursurile sale de Mecanică, fiindcă pe vremea aceea profesorul Sanielevici trata problemele vectorial, lucru rar, iar pentru noi, viitorii ingineri, aceste lucruri ne interesau



S. SANIELEVICI

îndeosebi! Când am văzut însă deasupra articolului despre care vorbiți, scris cu litere mari: *Probleme filozofice ale matematicii*, mi-am zis: „măi băiete, asta nu-i de nasul tău!“ — așa că m-am lăsat păgubaș.

— Și când colo, iată că era! Cu mine povestea-i mai complicată, fiindcă eu aș fi citit articolul dacă scumpul meu prieten ar fi catadicsit să-mi arate cartea mai înainte de venirea ta! A, dar stai, bădăie, că te-am prins eu cu ocaua mică! Cât ați vorbit, eu am frunzărit articolul, care-i la pagina 111, și nici pomeneală-n el de *jocul de șah*! Mă miram eu, să iasă tocmai la țanc!

— Te-ai mai mirat matale, bădiță, și altădată și tot n-ai învățat minte că cine râde la urmă, râde mai bine! Dar nu-i rău că ai dat un ochi prin articol, poate că ai dori să ne citești și nouă ceva din el.

— Da, asta aș dori. Uite ce spune chiar pe prima pagină: „gândirea axiomatică operează, într-adevăr, mai mult cu *forme* și cu *relații abstracte*, decât cu noțiuni științifice concrete

și cu relații între asemenea noțiuni. Și formele acestea abstracte pot fi, în genere, destul de ușor despărțite de considerații tehnice propriu-zise“.

— Foarte adevărat! Când fac o adunare sau o înmulțire, *numerele* cu care operez sînt *abstracte* și *nu concrete*, scriu tot $2 + 5$ sau 3×7 , indiferent dacă operațiile au fost provocate de o problemă în care era vorba de *mere* sau de *cărți* sau de un *lucru efectuat de oameni*, cu singura condiție ca mulțimile respective să fi avut același număr de elemente.

— Eu, dragă Paul, nefiind inginer, mă gîndesc, de pildă, la Euclid, care a definit *punctul* ca ceva ce *nu are nici o dimensiune*, sau *linia* ca avînd numai lungime etc.; și aceste elemente sînt la fel de abstracte fiindcă în practică nu pot opera cu o *linie* așa de subțire încît să nu aibă *lățime*, cu o *suprafață* care să nu aibă nici o *grosime* și așa mai departe. Când calculez o lungime, o arie sau un volum, mă refer la figuri geometrice privite ca forme abstracte, formate din asemenea puncte, linii sau suprafețe și neavînd nici un fel de însușiri materiale sau tehnice — așa cum s-ar prezenta obiectul real care m-a condus la acele operații — dar rezultatul aflat prin operațiile efectuate asupra obiectelor geometrice abstracte îl folosesc ca să știu ce volum a avut șanțul care a fost săpat sau ce cantitate de gaz trece în unitatea de timp prin conductele ce leagă două izvoare între ele.

— Sînt de acord cu cele ce ați spus amîndoi, a urmat Teodor Solonar, dar aș vrea să mai precizez că, plecînd de la aceste abstracții — definiții sau axiome — matematicienii au dedus pe cale logică, adică prin raționament, toate teoremele din aritmetică sau geometrie, cu alte cuvinte, vreau să accentuez că și *metoda* folosită de matematicieni ca să stabilească adevărurile cu care operează, este ea însăși *abstractă* și, din acest punct de vedere, *speculativă*.

— Ce ați vrut să spuneți cu „din acest punct de vedere?“

— Că deși matematica folosește, ca și metoda speculativă, calea pur deductivă pentru a-și stabili teoremele ei, spre deosebire de ea, matematica a făcut apel la experiență, dacă nu acum, cîndva, în trecutul îndepărtat. Definițiile și axiomele ei dovedesc clar aceasta.

— Totuși edificiul matematic se bazează numai pe axiome.

— Aici, cu permisiunea șefului, am să te corectez eu, dragă Paulică! *Edificiul matematic*, ca să folosesc denumirea ta, nu este numai o construcție axiomatică. La baza lui stau două metode complet diferite: *metoda axiomatică* despre care șeful are ceva de spus și *metoda genetică* sau *constructivă*, prin care s-a dezvoltat toată aritmetica, fără să mai vorbim despre algebră sau analiză.

— Nu știu dacă ai pus tu mâna vreodată pe *Elementele* lui Euclid, nu pe acelea pe care le-ai învățat tu la școală pentru nota 10 și mereu 10, ci și celelalte, veritabilele *Elemente*! Nu vreau să-mi răspunzi, fiindcă țin să ți le aduc eu însumi acum, aici pe masă. Le vezi? Trei volume publicate de *Gazeta matematică* între 1939 și 1941: „Euclid, *Elemente*, vol. I: cărțile I—VI de Geometrie plană; *volumul II*: cărțile VII—IX de Aritmetică și cartea X a Iraționalelor și *volumul III*: cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu, cartea XIV a lui Hypsicle și cartea XV apocrifă“. Au fost traduse de profesorul Victor Marian de la Cluj. El a murit de câțiva ani, dar prin această traducere va trăi atîta timp cît va trăi și amintirea lui Euclid. Și acum să le răsfoim. Uite, vol. I, cartea I care începe cu definiții...

— Măi băiete! Dar cele ce-mi arăți tu aici, sînt minunății! Văd și facsimilul primei pagini dintr-un manuscris al *Elementelor* și apoi chiar „definițiile“. Ia te uită!: „9: Iar cînd liniile care cuprind unghiul sînt drepte, unghiul se numește rectiliniu. 10: Iar cînd o dreaptă, ridicată pe o altă dreaptă, formează unghiuri adiacente egale între ele, fiecare din cele două unghiuri egale este drept și dreapta ridicată se numește perpendiculară la aceea pe care a fost ridicată“. Știi că-i foarte frumos și că mi-ai deschis și mie gustul ca să caut cărțile acestea?...

— Nu te împiedic să o faci, dar te împiedic să rămîi la pagina aceasta.

— Bine, dacă-i așa întorc pagina și citesc „Postulate“. Da, văd aici și postulatul al V-lea, vestitul postulat al paralelelor, iar după acestea urmează „Noțiuni comune“, de fapt

tot postulate sau axiome, cum este de pildă: „întregul este mai mare decît partea”.

— Nu asupra acestui lucru am vrut să-ți atrag atenția, ci asupra planului acestei cărți: întîi definiții, apoi postulate și axiome și după asta încep teoremele cu demonstrațiile lor. Dacă trecem la cărțile următoare, fiecare începe cu definițiile necesare cuprinsului, dar nu mai apar alte postulate și nici axiome fiindcă acelea au fost puse odată pentru totdeauna la începutul geometriei și pe baza lor au fost stabilite, în mod deductiv, toate teoremele. Este ceea ce se numește o construcție axiomatică a unei științe, în speță a geometriei. Acum să trecem la volumul al doilea, cărțile VII—IX. Să deschidem și aici la prima pagină, unde, cum era de așteptat, se află „Definițiile”.

— Într-adevăr! Dar definiția 1 este grozavă! „Unitatea este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu”. Adică unu este unu?

— Caută o altă definiție mai bună și mă închin!

— N-am pretenție, dar nu înțeleg cum vine asta? Și apoi, din ce în ce mai curios: Definiția a 2-a spune: „Iar *număr* este o mulțime compusă din unități”. Cum adică, unitatea, adică *unu* nu-i număr?

— Ei bine, dragul meu Paulică, dacă n-ai știut pînă acum, atunci află de la mine că grecii nu considerau pe *unu* drept număr, ci numai ca pe o componentă a numărului, tot așa după cum o călămidă nu-i un zid sau o casă, ci numai o componentă a lor. De altfel, în multe cărți de aritmetică din Evul Mediu timpuriu ai să găsești că șirul numerelor începe cu 2! Și acum întoarce iar pagina!

— Am întors-o. Văd 22 de definiții, ultima fiind a numărului perfect, despre care am citit și eu cîte ceva și apoi fără nici un fel de pregătire, este enunțată prima teoremă, după care urmează demonstrația ei!

— Ai văzut? Așa-i cu Aritmetica! Metoda folosită de Euclid aici diferă de aceea folosită, tot de el, la Geometrie. Acolo a avut nevoie de axiome și a inventat astfel metoda axiomatică, aici nu a mai avut nevoie de nici o axiomă; el a construit toate teoremele despre numere, prin raționament,

bazându-se numai pe definiții și, natural, pe toate teoremele ce le-a stabilit anterior ca adevăruri ferme, fiind bazate pe principiile logice. Clar?

— Știu eu ce să spun? Mai întâi, văd că *numărul întreg* a fost definit ca *număr cardinal*, adică prin aceea că-l definește ca pe o *mulțime de unități*, însă eu știu că el poate fi conceput și ca *număr ordinal*, număr de ordine, adică bazat pe noțiunea de *succesiune*, de *rang* sau de *poziția* pe care o are un element într-un șir ordonat.

— Nu aici este dificultatea, deși ea există, fiindcă noțiunea de *număr întreg*, stabilită într-un fel sau altul, este suficientă ca să se clădească pe ea întreaga aritmetică. Nu-i greu să-ți imaginezi că, după ce omul a cunoscut numărul natural, a dedus treptat proprietățile lui și relațiile dintre aceste numere. Asta înseamnă că a învățat să le adune și uneori să le scadă, să le înmulțească și tot în anumite condiții să le și împartă, fără ca, pentru aceasta să fie obligat să introducă anumite axiome. Așa au procedat toate popoarele din antichitate și atunci când grecii au preluat de la ei cunoștințele lor despre numere nu au avut alta decât să le prelucreze, adică să le sistematizeze și să le prezinte ca un tot ordonat, în care un adevăr sau o proprietate să fie dedusă, în mod logic, dintr-un alt adevăr sau proprietate, mai simplă, ce fusese stabilită anterior tot așa de riguros. Însă, după cum am făcut eu o aluzie, există în adevăr o dificultate, dar despre ea nu-i cazul să discutăm acum. Poate îi va veni și ei rîndul mai târziu.

— Bine, am să aștept să mi-o semnalati dumneavoastră cînd are să fie cazul, dar mai am încă două nelămuriri. Prima, mă întreb de ce a ales Euclid ordinea aceasta curioasă de a prezenta *Elementele*? Mai întâi geometria, care-i mai complicată și mai grea și apoi aritmetica, mai simplă și care probabil că a fost compusă și mai înainte? Apoi, de ce Euclid n-a dat și geometriei forma genetică?

— La prima întrebare, drept să-ți spun că mi-e foarte greu să-ți răspund, fiindcă nu m-am gîndit niciodată la acest lucru, deși văd că ar fi fost natural să-mi pun această întrebare. Dar, poate că încercînd să văd de ce nu mi-am

pus această întrebare, o să aflu răspunsul ce-l cauți. Cred că geometria a apărut ca prima știință experimentală, deoarece noțiunile ei de bază au fost stabilite prin încercările oamenilor de a duce o linie dreaptă, de a ridica o perpendiculară, de a măsura o distanță, de a afla o arie, un volum și așa mai departe. În papirusurile egiptene se găsesc formule aproximative pentru aria unui triunghi, formule ce denotă caracterul lor experimental, empiric. Deducem de aici că aceste noțiuni geometrice au putut fi tot așa de vechi ca și noțiunea de număr natural. Cine ar mai putea spune azi dacă întâi s-a statornicit noțiunea de număr și apoi s-a măsurat cu pasul, palma, degetul, sau cotul o anumită distanță ori un anumit segment dacă nu cumva, această măsură a sugerat noțiunea de număr? Oricum, oamenii aveau multă nevoie de construcții și deci geometria trebuie să se fi dezvoltat odată cu metodele de calcul practic, adică mai repede decât *aritmetica teoretică*, sau știința despre proprietățile numerelor întregi, care a fost dezvoltată de greci, începând cu școala lui Pitagora.

— Va să zică, dumneavoastră considerați că un argument ar fi faptul că geometria părea mai necesară și de aceea era mai dezvoltată chiar decât aritmetica? Poate să fie și așa, fiindcă tradiția spune că Tales a adus geometria și nu *aritmetica* din Egipt! De altfel, se știe că geometria a fost obiectul de predilecție al matematicienilor greci!

— Dar ar mai fi și un alt motiv. Pentru greci, metodele de calcul numeric nu aparțineau unei științe teoretice, ci unei tehnici, unei practici ce se învăța de către negustori și de către ceilalți meseriași, în școlile elementare, sub denumirea de *logistică*. Filozofii nu considerau logistica printre obiectele demne de învățământul lor superior. Dimpotrivă, geometria era la loc de frunte, alături de aritmetică, adică de știința despre numărul întreg și proprietățile lui. După cum am observat adineauri, grecii priveau numai întregii ca numere, iar celelalte numere — fracționare sau iraționale — erau considerate de ei ca *mărimi*. Pe acestea le reprezentau, de obicei, prin segmente de dreaptă sau prin configurații de

segmente, fie de dreaptă, fie de anumite curbe, ale căror definiții și proprietăți le erau cunoscute.

— Da, așa-i, acum îmi amintesc de scandalul provocat în școala lui Pitagora de către acel elev al lui, care dăduse în vileag existența numerelor iraționale. Era, cred, vorba despre $\sqrt{2}$, dacă nu mă-nșel!

— Nu a *numerelor*, ci a *mărimilor* iraționale, fiindcă nici ca mărimi, pitagoreicii nu voiau să le admită existența. Cît privește pe $\sqrt{2}$, căci într-adevăr despre el era vorba, în jurul lui trebuie să fi fost destul de multă discuție în vremea aceea, dacă Platon a afirmat că „acela care nu știe că diagonală patraturului este incomensurabilă cu latura lui” — căci aceasta-i semnificația lui $\sqrt{2}$ — „acela nu merită numele de om”.

— La prima întrebare, pusă de mata, dragă Paul, cred că răspunsul ar trebui legat de predilecția lor pentru geometrie și mai ales pentru gândirea intuitivă. Cînd aveau de-a face cu mărimi fracționare sau cu cele iraționale, grecii foloseau interpretarea geometrică, dar nu numai în cazul acesta, ci uneori chiar și în cazul anumitor numere întregi. De pildă, așa se explică denumirea de *pătratul* sau *cubul* unui număr. Produsul dintre două numere egale era pentru ei aria unui pătrat, după cum produsul a trei numere egale nu avea alt înțeles decît volumul cubului.

— Vreți să spuneți că, pentru a dezvolta aritmetica, adică teoria numerelor, ei ar fi avut nevoie de o anumită pregătire geometrică?

— Așa cred, oricum mai mult nu vă pot răspunde la prima întrebare. Acum la a doua: de ce nu a ales Euclid aceeași *metodă genetică* și pentru a prezenta geometria și de ce a fost nevoit să introducă axiomele? Aceasta, cred eu, se datorește celor două forme opuse de manifestare a materiei. Pe de o parte, mulțimile discrete de obiecte au condus la noțiunea de numere naturale, iar pe alta, manifestările continue ale materiei: zborul unei păsări, apa unui râu, întinderea unui câmp, au condus la noțiunile figurilor geometrice. Or, dacă numărul întreg a putut fi definit printr-o mulțime de unități

discrete, nu s-a putut realiza aceasta în privința unei linii. Linia nu a putut fi definită ca un aglomerat de puncte, chiar dacă ar fi fost considerate în număr infinit, fără ca această definiție să nu ducă la o contradicție.

— Aveți dreptate. Îmi aduc aminte de aceasta, de la lecțiile de Analiză matematică.

— De aceea, ca să evite paradoxurile, discutate cu mult lux de amănunte de către sofști și alți filozofi de pe vremea lui, Euclid a fost nevoit să aleagă calea axiomatică. Așadar, el a definit elementele geometriei ca punctul, linia, suprafața, volumul etc. și totodată relațiile ce sînt posibile între aceste elemente geometrice. Aceste relații, stabilite tot prin definiții, aveau forma unor *adevăruri evidente* și nu cereau să fie demonstrate.

— Dacă pe vremea lui Euclid, după cum am văzut și din text, exista o deosebire între postulate și axiome, mi se pare că azi această deosebire nu se mai poate stabili cu exactitate și numirile s-au contopit, nu-i așa?

— Da, numirile sînt sinonime, deși unii autori văd între acești doi termeni anumite deosebiri.

— Așadar, acesta-i motivul pentru care Euclid a folosit metoda axiomatică în expunerea geometriei?

— Da, iar acum, dacă vreți să ajungem și la jocul de șah, atenție mărită! Axiomele lui Euclid se prezentau ca niște adevăruri *absolute* și *evidente*. Cine s-ar fi putut îndoi că toate unghiurile drepte sînt egale? Că orice dreaptă nu se poate prelungi oricît de mult? Că întregul este mai mare decît partea? Că printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce mai mult decît o paralelă la acea dreaptă? Nimeni, cu siguranță că nimeni, fiindcă aceste axiome exprimau rezultate obținute pe cale intuitivă, în urma nenumăratelor experiențe făcute de om, în cursul atîtor mii de ani, atunci cînd a avut de rezolvat probleme legate de figurile sau corpurile geometrice la care ajunsese el prin abstractizarea corpurilor sau numai a anumitor părți din corpurile fizice din natură. Era totuși și ceva ce nu-i mulțumea pe anumiți matematicieni, și aceasta chiar de la apariția *Elementelor*. Anume, ei se îndoiau de independența axiomelor stabilite

de Euclid, cu alte cuvinte considerau că unele dintre ele ar putea fi deduse, *ca teoreme*, pe baza celorlalte ce ar păstra caracterul de axiome independente între ele.

— Știu la ce faceți aluzie, la celebrul postulat nr. 5, al paralelelor!

— Da, la aceasta și la altele pe care nu le vom discuta acum ca să nu lungim fără rost povestea. Important este să reținem faptul că, pînă la urmă, în secolul al XIX-lea au fost descoperite geometriile neeuclidiene și odată cu ele *axiomele* au pierdut semnificația de „adevăruri evidente și absolute”, iar *geometria* pe aceea de „model abstract și perfect al spațiului”.

— Într-adevăr, geometriile neeuclidiene se bazează pe un alt grup de axiome pe care le putem admite la fel de adevărate ca și axiomele lui Euclid, deși noile axiome sînt lipsite de orice sens intuitiv. Pe baza acestor axiome însă, au fost construite geometrii care corespund altui spațiu decît spațiul nostru real, spațiul fizic în care trăim, și nu avem nici un motiv să ne îndoim de adevărul lor logic, adică de exactitatea teoremelor stabilite pentru aceste spații, atîta timp cît ele au fost deduse pe bază de raționament.

— Numai cu condiția ca grupul de axiome să nu fi fost compus la întîmplare, ci să fie independente între ele, adică nici una dintre ele să nu fie o consecință a celorlalte.

— Iar te grozăvești! Adică îți închipui că aceasta nu o știam și eu?

— Bine, atunci spune repede și a doua condiție pe care trebuie să o îndeplinească un sistem de axiome, ca să formeze cu adevărat o geometrie.

— Ia mai lasă-l bădie pe Paul în pace! Ce ai cu el? Și mai ales cu mine, fiindcă mă întrerupi mereu! Află mata că prietenul meu ar vrea să se insiste că, fiind vorba de niște spații abstracte, chiar dacă axiomele sînt independente între ele, ar putea să se întîmple ca printre teoremele ce decurg din aceste axiome, să existe unele care să se contrazică între ele și neavînd un criteriu intuitiv, adică un model, pe care să verificăm acest lucru, geometria neeuclidiană astfel obți-

nută s-ar putea să nu fie consistentă. Asemenea probleme au fost larg dezbătute în secolul nostru, de fapt, începînd de la sfîrșitul secolului al XIX-lea și una dintre consecințele acestor cercetări a fost revizuirea critică a însuși sistemului de axiome stabilit de Euclid.

— Bine, dar geometria euclidiană și-a trecut examenul de valabilitate prin aplicarea ei continuă, în cele mai diverse ramuri ale științei timp de peste două mii de ani. Dacă în acest răstimp nu s-a ivit nici o contradicție printre teoremele ei, se mai poate aștepta să se ivească vreuna de acum înainte?

— Și de ce nu? Domeniul este deschis și numărul teoremeilor sale nu-i limitat, stimabile coleg!

— Oricum, ca să vorbim serios, nu-i vorba de a aștepta sau de a căuta o contradicție care, foarte probabil că nu se va ivi niciodată, ci de faptul că exigențele matematicienilor din secolul al XIX-lea erau diferite de acelea ale matematicienilor din secolul al III-lea î.e.n. În renumita carte de care am amintit, *Despre bazele geometriei*, David Hilbert a propus un model nou de axiomatizare a geometriei euclidiene în care, spre deosebire de Euclid și de alți precursori moderni, el arată că noțiunile elementare ale geometriei trebuie degajate de orice evidență intuitivă sau de orice conținut experimental, cu alte cuvinte se cere ca aceste noțiuni să fie definite prin axiomele însăși.

— Prea ai concentrat totul într-o frază, bădieu Teodor. De data asta te rog eu să fii mai explicit, căci n-am înțeles ce vrei să spui, tu sau David Hilbert!

— Poate că ai dreptate și ca să nu mă mai bîlbîi fără de folos, hai să las pe cineva mai competent să vorbească. Să-l ascultăm pe Simion Stoilov, că doar avem cartea lui aici la îndemînă. Deschide, te rog, la pagina 117 și citește tare ca să auzim și noi paragraful de la începutul paginii, care-i, de altfel, însemnat acolo.

— Bine, numai să mă oprești cînd ai să crezi tu! „Fără a fi văzut, fără a fi imaginat vreodată un punct, o dreaptă sau un plan, s-ar putea urmări perfect demonstrațiile și deduce



S. STOILOV

logic toate propozițiile care constituie geometria euclidiană. Și această sublimare, această purificare de orice imagine reprezentativă extrasă din lumea fizică, este necesară pentru a întemeia riguros o geometrie, în speță, geometria euclidiană, pe bazele ei pur raționale. Euclid nu a reușit decât incomplet în raționalizarea geometriei. Definițiile lui vorbesc imaginației, desigur, altfel decât definițiile axiomatiche: un punct, zice Euclid, este ceea ce nu se poate divide; o linie: o lungime fără lărgime etc. Dar aceste definiții nu-i servesc la nimic în cursul demonstrațiilor lui. Proprietățile care intervin în aceste demonstrații sînt tocmai cele puse în evidență în definițiile axiomatiche ale lui Hilbert și *numai* aceste proprietăți. Că ele singure, fără definițiile lui Euclid, nu mai evocă în noi noțiunile intuitive curențe de punct, dreaptă etc. este altceva". Mă opresc aici, fiindcă poftesc să ne spui mai întâi care-s acele axiome ale lui Hilbert. Ești și tu de părerea mea, Paulică?

— Gînd la gînd!

— Dacă-i așa, atunci să punem mîna pe caiet că nici el nu are de ce sta degeaba aici! Uite, am copiat în traducere, unele fragmente din *Bazele geometriei*. Primul paragraf, intitulat „Elementele geometriei și cele cinci grupe de axiome” începe așa: „Concepem trei sisteme diferite de obiecte: Numim obiectele primului sistem *puncte* și le notăm cu $A, B, C, \dots$; numim obiectele celui de al doilea sistem *drepte* și le notăm cu $a, b, c, \dots$; numim obiectele celui de al treilea sistem *plane* și le notăm cu $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Concepem punctele, dreptele și planele în anumite relații reciproce și numim aceste relații prin cuvinte ca: „a fi situat”, „între”, „paralel”, „congruent”, „continuu”; descrierea exactă a acestor relații și totodată completă pentru scopuri matematice, se obține prin axiomele geometriei.

Putem împărți axiomele geometriei în cinci grupe; fiecare grupă exprimă anumite fapte fundamentale... anume: „I : 1 — 8 — axiome de incidență (adică de legătură), II : 1 — 4 — axiome de ordonare, III : 1 — 5 — axiome de congruență, IV: axioma paralelelor, V : 1 — 2 — axiome de continuitate”. În articolul din care am ascultat un fragment, Simion Stoilov scrie că nu importă cuprinsul exact al acestor axiome fiindcă denumirea lor le dezvăluie, într-o oarecare măsură, natura. Are dreptate și ca să vă conving, am să vă citesc numai cîteva. De pildă, din primul grup: „ I_1 : Pe o dreaptă există cel puțin două puncte. I_2 : Două puncte determină cel puțin o dreaptă. I_3 : Două puncte determină cel mult o dreaptă”.

— Am înțeles. Asta înseamnă că *două puncte determină o dreaptă și numai una singură*. Oare nu-i prea multă vorbărie degeaba?

— Nu, fiindcă din definițiile date *tu nu știi nici ce-i punctul nici ce-i dreapta*, pentru tine ele sînt niște *semne goale*, lipsite de orice înțeles intuitiv. Numai prin aceste axiome ți-ai putut face o idee despre dreaptă și legătura ce poate și trebuie să existe, în mod necesar, între ea și unul sau mai multe dintre punctele care *sînt situate* — observă bine cuvîntul, fiindcă el a fost stabilit dinainte — spun deci, punctele ce sînt situate pe dreaptă.

— Mă întreb numai, bădăie Solonar, dacă pot cu adevărat să smulg din mintea sau imaginația mea *noțiunea intuitivă* cu care aş spune că m-am născut, de punct, dreaptă, suprafață și să o reconstitui pe baza acestor axiome? Dacă aş putea ajunge de la aceste semne pure A, B, C sau a, b, c , la noțiunea de dreaptă și așa mai departe?

— Asta-i cu totul altă problemă și nici într-un caz nu o putem discuta acum, tocmai acum!

— De ce mă rog acest *tocmai acum*?

— Fiindcă *tocmai acum* am ajuns la ceea ce hotărîsem să stabilim! Tot aici, în caiet, mi-am notat aceste rînduri dintr-un prea frumos articol, „Metodele axiomaticii moderne”, al matematicianului Jean Dieudonné, publicat în volumul lui F. Le Lionnais: *Les grands courants de la pensée mathématique*, apărut în 1962, la Paris. Iată, am să vă citesc numai acea parte din articol, care se referă la sistemul axiomatic introdus de Hilbert. „Ideea fundamentală a lui Hilbert este aceasta: în enunțul propozițiilor matematice, semnele folosite sînt *semne pure*, lipsite de orice semnificație. Ca să înțelegem acest punct de vedere să luăm ca termen de comparație un joc, de pildă *jocul de șah*: cu piesele acestui joc — care au forme și culori diferite, așa fel ca să se poată deosebi între ele — se alcătuiesc configurații care se succed după un procedeu supus la *anumite reguli*, fixate odată pentru totdeauna... Ca să joci șah corect nu-i deloc necesar să asociezi vreo reprezentare mintală de fiecare trăsătură, considerînd-o ca un simbol, e de ajuns să fii sigur că regulile au fost observate bine, ceea ce însăși mutarea ți-o arată. Dacă transformăm aceasta în matematică, avem concepția lui Hilbert: matematicile devin un joc în care *piesele* sînt semnele grafice ce se deosebesc unele de altele prin forma lor; cu aceste semne se formează configurații care se vor numi, după forma ce o au, *relații* sau *termeni*; ținînd seama de anumite reguli, anumite relații sînt calificate ca adevărate și alte reguli ne arată cum să obținem relații adevărate, fie pornind de la niște relații oarecare, fie plecînd de la alte relații adevărate; punctul esențial este că aceste reguli sînt astfel că, pentru a verifica dacă au fost observate este de ajuns să se examineze forma configu-

rațiilor ce intră în joc. E important să accentuăm că, cuvântul *adevărat* ca și cuvintele *relație* sau *termen*, nu au în această concepție decât un sens pur *convențional*, aceste cuvinte pot fi comparate cu termenii folosiți în jocul de șah, de pildă *șah*, *mat*, *rocadă*, care se folosesc pentru a caracteriza într-un mod prescurtat anumite situații sau anumite mutări din joc, ce ar necesita altfel prea multe cuvinte ca să le arăți prin înseși regulile lor; cuvintele matematice pe care le-am amintit sînt și ele prescurtări pentru a arăta configurații a căror constituire este precizată prin reguli. În orice caz, nu mai este vorba de *adevăr absolut*, nici de relații, nici de reguli care să permită să treci de la o *relație adevărată* la alta; se poate spune că matematicile astfel concepute nu apelează la mai multe noțiuni și ipoteze metafizice decât, de exemplu, jocul de șah. Și tot așa, după cum fiecare admite că avem o metodă obiectivă ca să recunoaștem dacă o mutare dintr-o partidă de șah este corectă, *se va dispune de o metodă obiectivă* ca să se recunoască dacă un text matematic este corect sau nu. Asta am avut eu de citit ca să-mi țin făgăduiala!

— Drept să vă spun, m-a mirat *viitorul* folosit în frază. Se spunea, dacă am reținut bine, „*se va dispune* de o metodă obiectivă, pentru a se stabili dacă un text matematic este corect sau nu”. De ce a folosit Dieudonné timpul viitor și nu tot *prezentul* ca în fraza ce se referea la mutarea pieselor din jocul de șah?

— Bravo, Paulică! Mie îmi făcuse impresia că bădia a tradus greșit! De, se mai poate întîmpla, mi-am zis!

— Da, Paulică, ai dreptate. De aici înainte discuțiile noastre se vor axa asupra căutării acestei metode obiective care să fie în stare să decidă dacă combinarea unor *semne goale* și lipsite de orice semnificație nu pot da naștere la vreo configurație care să fie exact contrară alteia obținută, respectînd regulile stabilite prin axiome. Cu alte cuvinte, prin ce metode și cum se poate preciza că două configurații stabilite în concordanță cu regulile prescrise, nu se contrazic una pe alta? Că problema l-a preocupat chiar pe Hilbert, nu-i nici o îndoială. Iată ce scria însuși Hilbert, în cartea amintită: „Axiomele din cele cinci grupe stabilite în capitolul I nu se



D. HILBERT

contrazic între ele, adică nu este posibil ca prin raționamente logice să deducem din ele un fapt care să contrazică una dintre axiomele stabilite". Ca să-și dovedească afirmația, Hilbert a transferat problemele din domeniul geometriei în domeniul numerelor reale, folosind în acest scop metodele geometriei analitice, adică reprezentarea punctului geometric printr-o pereche de două numere etc. și de aici a ajuns la concluzia: „Orice contradicție în consecințele deduse din axiomele I—V, ar trebui deci să poată fi regăsită în aritmetica sistemului numerelor reale".

— Interesant de tot! Prin urmare, Hilbert nu a putut dovedi necontradicția și deci nici consistența geometriei axiomatice stabilită de el, decât punând-o în căruța aritmeticii? Asta, da! zic și eu că-i surpriză, cel puțin pentru mine, poate că tu, Paulică, știai aceasta?

— A, nu! Ți-am spus de la început că nu mă pricep deloc în probleme de fundamente ale matematicii. De aceea mă și interesează atât discuția noastră prin noutatea ei. Mă întreb ce vine acum? În mod firesc, Hilbert ar trebui să meargă mai

departe și să stabilească necontradicția aritmeticii, dacă-i vorba că trebuie pus totul la îndoială! Pentru mine e un *non-sens*; cum ar putea fi aritmetică contradictorie? Dacă ar fi așa, nimic nu s-ar mai fi putut construi și niciodată nimeni nu ar fi pus piciorul pe Lună! Dar, mă rog, dacă am intrat în joc, trebuie să jucăm și dacă am început să ne îndoim, mergem cu îndoiala pînă în pînzele albe!

— Strașnic, Paulică, așa te vreau!

— Îi fi vrînd mata așa, bădie, dar ce faci cu biata aritmetică, cum îi stabilești consistența, cînd tot mata mi-ai arătat cîndva că ea s-a născut pe cale genetică, adică s-a construit din aproape în aproape, fără a mai ține seama și de axiome? O axiomatizezi și pe ea?

— Și de ce nu? Va face-o și Hilbert, așa cum dealtfel au încercat și alții mai înaintea lui, dar aceia au axiomatizat aritmetica bazîndu-se pe alte criterii decît Hilbert.

— Așadar, iată surpriza numărul 2! și care-i surpriza numărul 3?

— Asta ce ți-o spun acum. Că nu-i vorba decît de axiomatizarea aritmeticii numerelor întregi.

— Protestez! Hilbert a afirmat mai sus că trebuie stabilită necontradicția numerelor reale și nu numai a celor întregi!

— Nu protesta că aici are dreptate bădia Solonar și, dacă mă gîndesc bine, răspunzîndu-ți ție dovedesc că surpriza numărul 3 m-a surprins mai puțin! Uite dar cum stau lucrurile: orice număr fracționar poate fi considerat ca o pereche ordonată de numere întregi. De pildă, fracția $\frac{4}{7}$ poate fi redusă la perechea ordonată de numere întregi (4,7). Știi de ce-i spun ordonată?

— Îmi închipui, chiar dacă nu știam: vei scrie întotdeauna mai întîi numărătorul fracției și apoi numitorul.

— Exact. Așadar, dacă pot stabili o axiomatizare a numerelor întregi, rezultă de la sine și axiomatizarea numerelor fracționare, ele fiind reduse la numerele întregi prin această nouă interpretare a lor. Rămîne acum problema numerelor iraționale. Aceasta-i mai complicată, nu o știu eu chiar prea bine în amănunte, fiindcă au trecut destui ani de cînd am în-

vătat eu Analiza matematică, dar pentru cât ne trebuie nouă, cred că bădia Solonar va hotărî el dacă-i de ajuns sau nu. Există mai multe teorii între care, de fapt, cred că se poate stabili o corespondență, prin care se arată că orice număr real se poate exprima ca limita unui șir infinit de numere raționale, adică fracționare. Să luăm de exemplu pe $\sqrt{2}$. Dacă îi calculezi rădăcina pătrată, cu diferite aproximații, el poate fi considerat că este valoarea limită a șirului format din aceste aproximații, duse din ce în ce mai departe, adică să avem:

$$\sqrt{2} = \text{limita șirului: } 1,4 = \frac{14}{10}; 1,41 = \frac{141}{100}; 1,414 = \frac{1414}{1000}; \dots$$

Așadar, numerele iraționale și celelalte se reduc la numerele fracționare și în ultima instanță tot la numerele întregi, singurele care au fost concepute în mod intuitiv, pe cale constructivă, pornindu-se de la noțiunea de unitate.

— Despre numerele întregi s-a spus și s-a scris foarte mult. De pildă, matematicianul și filozoful Jules Tannery, fratele renumitului istoric al matematicilor Paul Tannery, în cartea lui *Știință și filozofie* scria: „Pentru poet, puterea de evocare ce există în cuvinte este foarte slabă; pentru savant, cuvintele sînt prea impregnate de senzații, ele nu sînt destul de decolorate; ele indică prea multe obiecte sau grupuri particulare; exprimînd relații între obiecte sau între grupuri, ele ne fac să ne gîndim nu numai la aceste relații, dar încă și la obiectele sau la grupurile respective și aceasta este prea mult; numai numărul și știința numerelor prezintă o mulțime de semne cu adevărat potrivite să exprime numai relații. Noțiunea de număr întreg... ajunge să creeze aritmetica, algebra și întreaga analiză... problemele ce le tratează (aceste științe) se pun unele după altele, devenind din ce în ce mai complexe, din ce în ce mai generale și unica lor materie se reduce numai la număr, care, în ultima analiză, se reduce numai la numărul întreg“. Acum, după această digresiune să ne reîntoarcem la Hilbert. La un an după ce a publicat *Bazele geometrice*, a apărut articolul său intitulat „Despre noțiunea de număr“ în care găsim: „În teoria conceptului de număr, metoda axiomatică se formulează așa: Gîndim un sistem de lucruri, numim aceste

lucruri numere și le notăm cu $a, b, c, \dots$. Ne închipuim aceste numere în anumite relații reciproce, a căror descriere precisă și completă are loc prin următoarele axiome: I. Axiome de incidență; II. Axiome de calcul; III. Axiome de ordonare; IV. Axiome de continuitate." În total au fost enunțate 18 axiome.

— După câte văd eu, bădie, povestea se repetă, numerele apar ca niște entități abstracte supuse condiției de a se combina între ele după anumite reguli stabilite prin cele 18 axiome. Cu alte cuvinte și aritmetica nu-i mai mult decât un joc de șah! Nu-s eu de acord, dar hai să zicem că așa fi. În acest caz, pe spinarea cui cade acum obligația necontradicției ei? Fiindcă, din cele ce ai spus tu mai înainte am dedus că, dacă în logică *non-contradicția* unui concept atrăgea, așa cum se știe, *posibilitatea* lui, în sistemul lui Hilbert, *non-contradicția* unui concept matematic definit în mod axiomatic, echivalează cu *existența* lui.

— Această problemă l-a frământat pe Hilbert mulți ani, la început numai pe el dar peste vreo 20 de ani, în jurul lui, adică la universitatea din Göttingen, s-au adunat mai mulți matematicieni, toți elevii lui, care urmăreau să lămurească problema ridicată de tine. Chiar în 1905, Hilbert mărturisea, într-un articol „Despre bazele logicii și ale aritmeticii” că nu-i posibil să se demonstreze *non-contradicția* aritmeticii tot așa de ușor cum a fost demonstrată *non-contradicția* geometriei. Iată ce scria el însuși: „Dificultățile întâlnite la fundamentarea aritmeticii sînt, în parte, de altă natură decât acelea ce se cer învinse la fundamentarea geometriei. Atunci cînd am examinat bazele geometriei, anumite dificultăți de natură pur aritmetică au fost lăsate deoparte... La fundamentarea aritmeticii, invocarea altei discipline fundamentale apare de nepermis... Aritmetica este considerată ca o parte a logicii și, de cele mai multe ori, la fundamentarea aritmeticii se admit, ca *premise*, conceptele fundamentale tradiționale ale logicii. Dar studiindu-le cu atenție, observăm că în expunerea obișnuită a legilor logicii se întrebuintează anumite concepte fundamentale ale aritmeticii, de pildă, conceptul de mulțime, în parte chiar conceptul de nu-

măr, îndeosebi ca număr indicator. Ajungem astfel la o situație fără ieșire și de aceea, pentru evitarea paradoxurilor, este necesară o dezvoltare parțial concomitentă a legilor logicii și ale aritmeticii“.

— Foarte interesante sînt aceste observații și aș fi tare curios să văd cum a fost înlăturat, în mod practic, pericolul de prăbușire a edificiului aritmetic?

— Deocamdată Hilbert se arată optimist. „Eu sînt de părere — scria el — că toate dificultățile amintite pot fi învinse și că se poate ajunge la o fundamentare riguroasă și complet satisfăcătoare a conceptului de număr, anume printr-o metodă pe care aș numi-o *axiomatică* și a cărei idee de bază aș caracteriza-o în altă comunicare.“

— Cu alte cuvinte, acum în 1905, ideile nu-i erau încă destul de coapte?

— Așa se pare. În această lucrare el schițează numai metoda de a construi bazele logice ale gândirii matematice. Ca să vedeți cum, am să vă citesc cîteva rînduri: „Se numește obiect al gândirii sau — mai pe scurt — obiect, un lucru din gândirea noastră și se înseamnă printr-un simbol. La baza studiului nostru punem mai întîi un obiect, 1 (unu). Compunerile acestui obiect cu sine însuși, de cîte două ori, de cîte trei ori sau de mai multe ori, precum 11; 111; 1111;... le numim combinații ale obiectului 1 cu sine însuși; la fel se numesc orice combinații ale acestor combinații: (1) (11); (11) (11) (11);... iarăși combinații ale acestui obiect 1 cu sine însuși. Aceste combinații se numesc, de asemenea, pur și simplu obiecte și de aceea obiectul 1, pus la bază, se numește *obiect simplu*. Adăugăm acum un alt obiect simplu și îl denumim cu semnul = (egal). Apoi formăm combinații cu aceste două obiecte, precum: 1 = ; 11 = ; (1) (= 1); (= = =); 1 = 1...

Sper că ați observat că odată cu cele două obiecte, 1 și =, Hilbert a introdus implicit și două axiome. Prin ele, el precizează natura sau forma combinațiilor posibile între primul obiect cu el însuși sau între cele două obiecte. După ce aceste combinații de două obiecte simple au fost discutate și împărțite în două clase, *clasa celor existente* și *clasa celor neexistente* (după cum combinațiile satisfac sau nu axiomele

stabilite), Hilbert introduce încă alte trei elemente simple, anume: $\cup$ (mulțimea infinită, infinitul), f (următorul) și f' (operația asociată) și concomitent cu ele cele trei axiome corespunzătoare. Așadar, iată-ne în fața a cinci axiome prin care se stabilește modul de operație între cele cinci elemente simple, introduse în mod abstract. În felul acesta, Hilbert spera să fi găsit calea prin care să se evite orice contradicții și să asigure cea mai riguroasă axiomatizare a aritmeticii.

— Din felul cum te exprimi am impresia că operația nu a reușit. De ce?

— De! Ascultă ce a scris Henri Poincaré, într-un articol intitulat „Noile logici” pe care l-am citit în volumul *Știință și metodă*, în legătură cu introducerea „obiectului 1” și a consecințelor pe care le trage Hilbert de aici: „Precizăm că prin considerarea *obiectului 1* nu este implicată noțiunea de număr, căci e de la sine înțeles că 1 nu-i aici decât un simbol și nu ne preocupă deloc să-i cunoaștem semnificația”.

— Perfect! Rezultă că Poincaré este de acord cu ipoteza lui Hilbert!

— Ai răbdare, bădie, și lasă-mă să citesc mai departe: „Grupele formate cu acest obiect repetat de două, trei sau de mai multe ori...” iar când nu te aștepți, pune punctele de suspensie și după un oftat, de mai mare dragul, se dezlănțuie: „Ah! de data aceasta nu mai este același lucru, căci dacă introducem cuvintele *două*, *trei* și, mai ales, *de mai multe ori*, înseamnă că introducem noțiunea de număr și atunci definiția numărului întreg finit, pe care vom afla-o îndată, va veni prea târziu. Autorul este un prea bun cunoscător al problemei, ca să nu fi observat el însuși această greșeală logică de *anticipare a principiului*. De aceea, la sfârșitul lucrării sale, el încearcă să repare lucrurile”.

— Admirabilă observație! Dacă nu știi ce este un număr, cum pot afirma că-l compun cu sine însuși, de două, de trei sau de mai multe ori? Poincaré a avut tot dreptul să-l învinuiască pe Hilbert de a fi comis „petitio principii”, fiindcă după câte mai țin eu minte de la logică, așa se numește această greșeală de raționament în forma ei latinească! Da, în

demonstrarea tezei sale, Hilbert a folosit un argument neîntemeiat!

— Și cu toate acestea, eu nu sînt de această părere, ci cred că e mai degrabă o greșală de exprimare, fiindcă în realitate, omul a ajuns la noțiunea de număr întreg tocmai prin aceste alăturări de *două, trei și mai multe* obiecte, fără să fi știut el atunci să le numească într-un fel anume! Matale, Todirel, ce gîndești?

— Eu? Nu gîndesc nimic! Însuși Poincaré afirma, undeva tot în cartea asta, că celor mai mulți dintre oameni nu le place să gîndească. El nu găsește nici un rău în această atitudine adăugînd că pe aceia îi călăuzește instinctul! Iar în legătură cu încercarea lui Hilbert și a tuturor acelor care au căutat să axiomatizeze aritmetica, știu că s-a opus; el nu a admis că aritmetica poate fi stabilită pe baze axiomatice, deoarece considera că *principiul inducției complete*, fără de care nu se poate concepe aritmetica, este de natură intuitivă, că este chiar *o intuiție fundamentală a spiritului nostru*. Dar mai bine ar fi să vă citesc chiar ce scria Poincaré, căci am face astfel economie de timp și mai ales de gîndire: „Definițiile numărului sînt foarte numeroase și foarte diferite, renunț să enumăr și numele autorilor. Nu trebuie să ne mire că sînt atîtea! Dacă una dintre ele ar fi fost satisfăcătoare, nu s-ar mai fi căutat altele. Dacă fiecare nou filozof care s-a ocupat de această chestiune a crezut că trebuie să inventeze altă definiție, înseamnă că nu este mulțumit cu acelea ale înaintașilor și dacă nu era mulțumit, era fiindcă își închipuia că a descoperit în ele greșala de anticipare a principiului. Citind scrierile consacrate acestei probleme, am simțit întotdeauna un adînc sentiment de stinghereală, am așteptat mereu să mă lovesc undeva de anticiparea principiului și dacă nu-l observam imediat, știam că nu am fost destul de atent. Aceasta pentru că este imposibil să dai o definiție fără să enunți o frază și greu să enunți o frază fără să pui în ea un *nume de număr*, sau cel puțin cuvîntul *cîtiva*, sau cel puțin *un cuvînt la plural*. Iar de aici încolo, panta este alunecoasă și în fiecare clipă riști să cazi în anticiparea principiului”.

— Prin urmare, au existat și alți matematicieni care au căutat, alături de Hilbert, și poate chiar mai înainte de el, să afle o soluție în problema fundamentelor aritmeticii, iar matale ai tăcut mîlc!

— Da, au existat, există și probabil că vor mai exista, a răspuns Teodor Solonar.

Eram mai mult decît fericit de buna dispoziție a prietenului meu. Am fiert cafeaua, am mai glumit și din nou l-am ascultat:

— Lăsînd deoparte comentariile făcute de Descartes, de Pascal sau de Leibniz asupra fundamentelor matematicilor, am putea afirma că pînă la începutul veacului al XIX-lea, matematicienii nu s-au gîndit să cerceteze în mod riguros noțiunile fundamentale și principiile pe care se bazează aritmetica și geometria. De-abia atunci a izbucnit „criza fundamentelor”, cum se numesc azi aceste cercetări și ea a fost provocată de dezvoltarea modernă a matematicilor. Noile descoperiri din Analiza matematică sau din Teoria mulțimilor au arătat că *evidența intuitivă* pe care se bazau multe dintre axiome sau procedeele de stabilire ale adevărurilor matematice și chiar însăși noțiunea de *adevăr matematic*, pot duce la erori grave. Iată cîteva pe care sînt sigur că le cunoașteți: intuiția ne spune că o curbă este generată de mișcarea continuă a unui punct și deci că nu poate exista o *curbă continuă* fără ca să aibă, în fiecare punct al ei, o *tangentă* și totuși au fost găsite asemenea curbe, de pildă, se cunoaște exemplul unei curbe ale cărei puncte umplu un pătrat.

— Exact, bădie Solonar, este *curba lui Peano*, una dintre distracțiile mele favorite cînd sînt obosit și vreau să-mi liniștesc gîndurile.

— Cum asta, măi Paulică? Îți liniștești gîndurile cu o curbă ce nu ți-o poți imagina?

— Ba, din contra, mi-o pot imagina foarte bine, așa de bine încît îmi las gîndurile să fugă la infinit, alături de punctul ce o descrie. Uite, dacă-mi permite bădia am să ți-o dovedesc, desenînd-o!

— Desigur, poftim, ai aici hîrtie și creion. Sînt și eu curios să văd acest desen, fiindcă drept să-ți spun, nu l-am întîlnit nicicînd.

— Cred! Eu l-am găsit întîmplător într-un articol al lui Hans Hahn, care se chema tocmai „Geometrie și intuiție“, cu vreo zece ani în urmă și mi-a plăcut așa de mult, încît această mică pîrticică din el mi-am și însușit-o și am făcut din ea o recreație! Iată despre ce-i vorba: desenez un pătrat și îl împart în patru pătrate egale (fig. 3). Fixez centrele acestor pătrate și-mi închipui un punct care trece de la unul la altul cu o mișcare uniformă și urmînd un drum paralel cu laturile pătratului, așa cum fac eu aici. Apoi, îmi închipui același pătrat, împărțit nu în patru, ci în 16 pătrate, cu alte cuvinte, fiecare dintre pătratele inițiale le împart iar în patru pătrate și fixez din nou centrele acestor pătrate (fig. 4).

— Știi ce urmează: vei uni cu o trăsătură continuă, prin segmente de dreaptă, paralele cu laturile pătratului, toate aceste centre.

— Da, așa cum o fac acum (figura 4).

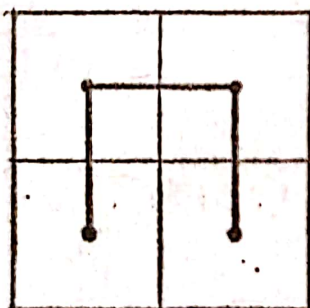


Fig. 3

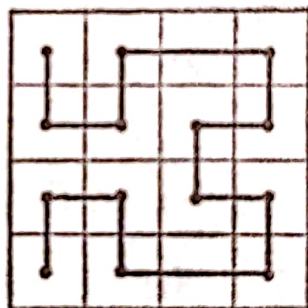


Fig. 4

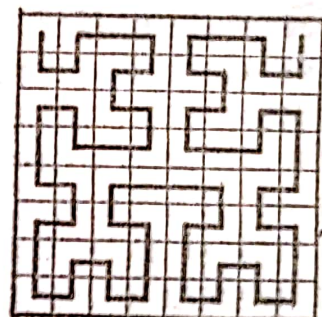


Fig. 5

— Și din nou, faci un alt pătrat și împarți pe fiecare din cele 16 pătrate în cîte 4 pătrate. Obții astfel $4 \cdot 16 = 64$ pătrate, le cauți centrele și le unești (figura 5).

— Da, apoi las gîndul să vagabondeze, urmărind curbele din ce în ce mai sinuoase care se obțin, cînd în loc de 64 de pătrate se vor prezenta pe foaie $64 \cdot 4 = 256$ pătrate, apoi $256 \cdot 4 = 1024$... Curba continuă, descrisă de vîrfurile creionului meu, se furișează astfel treptat, treptat printre toate punctele

pătratului, pînă ce îl împînzește cu totul, ca o apă care inundă totul în calea ei, dar altfel, cumva mai fin, disecînd parcă continuitatea materială... Cînd am ajuns la această imagine și vreau să urmăresc curba în toate meandrele ei, gîndurile se liniștesc și parcă m-am trezit dintr-un somn odihnitor!

— Zi-i inginer și pace! Pînă și celor mai subtile probleme el știe să le găsească o aplicație practică! Ți-ar fi trecut matală, bădie Teodor, o idee așa de năstrușnică prin minte? Mie nu, dar parcă-mi vine, nu știu cum, să-l imit!

— Mă rog, eu îți cedez invenția fără să-ți cer drepturi de autor!

— Atunci, mai vorbește-ne, bădie, și despre alte asemenea minunății și poate că inginerul nostru ne va oferi încă ceva pe deasupra!

— Acel „ceva pe deasupra” am să ți-l ofer eu, amintindu-ți că „lăcomia strică omenia” și că cele spuse de Paul au însemnat doar o paranteză în fraza pe care o începusem, anume că exemplul dat de Peano în 1890, la fel cu multe altele, au făcut pe matematicienii secolului al XX-lea să înțeleagă că au trecut vremurile acelea fericite cînd Descartes putea afirma plin de mîndrie că „numai matematicienii au putut găsi cîteva demonstrații, adică adevăruri sigure și evidente”! Prin 1910, B. Bolzano propunea să se analizeze bazele matematicii, cu alte cuvinte, noțiunile simple, ireductibile, precum și principiile pe care se sprijină raționamentele obiective ale teoremelor. În particular, nu numai el, dar și M. Ohm a încercat să dea o formă axiomatică aritmeticii. Încercarea lor nu a reușit, fiindcă amîndoi porneau de la noțiunea de număr definit în mod geometric. Ideea însă a fost acceptată și, astfel, mulți matematicieni s-au străduit să înlocuiască definițiile intuitive ale operațiilor aritmetice prin altele logice, dar abia peste 70 de ani a fost prezentat un studiu sistematic asupra numărului întreg de către G.G. Frege. În cartea lui, apărută în 1884 sub titlul *Bazele aritmeticii, o cercetare logico-matematică asupra noțiunii de număr*, el arăta, așa cum este menționat și în titlu, că noțiunea de număr întreg, precum și întreaga aritmetică pot fi deduse pe cale pur logică.



G. CANTOR

pornind de la noțiunea de mulțime și cardinalul corespunzător ei, cum au fost concepute acestea de G. Cantor în teoria mulțimilor.

— Că Frege are de gând să deducă întreaga aritmetică pe cale logică, treaba lui. Eu cred că aritmetica înseamnă ceva mai mult decât logică, dar dacă-mi definește numărul întreg prin cardinalul unei mulțimi, atunci dă-mi voie să-mi amintesc definiția numărului cardinal din cărțile de aritmetică de cursul primar. Despre acest *număr cardinal* este vorba?

— Nu, el insistă chiar ca să nu se facă această confuzie. Pentru Frege, numărul sau cardinalul unei mulțimi înseamnă mulțimea tuturor mulțimilor asemenea cu o mulțime dată, adică mulțimea mulțimilor în care elementele lor pot fi puse în corespondență biunivocă.

— Ei, acumă chiar că nu mai înțeleg nimic! Poate că Paul...

— Uite, să ne oprim la numărul 5. Ce înseamnă pentru tine numărul 5?

— Înseamnă ceea ce-mi rămîne prin abstractizare dacă privesc o grămadă de 5 mere, de 5 cărți, de 5 creioane, de 5

țigări, de 5 pietre și așa mai departe. Însușirea comună a tuturor acestor grămezi este numărul 5, căruia îi mai zic și *număr cardinal*.

— Foarte bine, numai că eu aș vrea să insistăm ceva mai mult asupra *însușirii comune* acestor grămezi. De pildă, dacă izolez două grămezi, cum pot să-mi dau seama că au același număr cardinal 5?

— Grupînd cîte două elemente din cele două grămezi, adică punînd, cum ai spus tu, în *corespondență biunivocă* elementele acelor două mulțimi și constatînd că prin această corespondență în nici o grămadă nu a rămas vreun element pe din afară.

— Atunci problema-i rezolvată. Presupune că am format o mulțime din toate mulțimile care sînt așa, ca să existe această corespondență biunivocă între oricare dintre ele și o mulțime pe care am ales-o de control. Desigur că numărul acestor mulțimi este infinit, dar eu le-am putut separa de toate celelalte mulțimi, tot infinit de multe, cu care acestea nu sînt în corespondență biunivocă. Acum *definesc numărul 5* prin această *mulțime a tuturor mulțimilor* care au pe 5 drept număr cardinal. Această mulțime se numește, după Frege, *cardinalul uncia dintre aceste mulțimi*.

— Bine, acum am înțeles că pot defini așa *numărul întreg* oarecare. Dar de unde știu eu care-i numărul 1, sau 2, sau chiar 5 despre care am vorbit? Definiția lui Frege nu-mi lămurește această posibilitate de identificare!

— Ai perfectă dreptate și mă bucur că ai sesizat lipsa. Dar și Frege a întâmpinat-o căci pe lângă definiția numărului întreg, în general, el a mai definit pe *zero* și noțiunea de *successor*. Numărul zero, privit ca un număr întreg, nu ar putea avea altă definiție decît aceea care a fost dată și numărului întreg, așadar zero este mulțimea tuturor mulțimilor vide.

— Dă-mi voie să-ți spun că această definiție e tare curioasă! Cum poate exista o mulțime de mulțimi care nu există?

— Am să-ți răspund eu, cu versurile lui Coșbuc, îți mai aduci aminte de ele? „Nu cerceta aceste legi...”

— „Că ești nebun de le-nțelegi!” Așa e clar și mai ales *logic*. Atunci cred că, prin *succesorul* unui număr N trebuie să înțeleg pe acela al cărui cardinal corespunde lui $N + 1$?

— Cam așa ceva. Nu intrăm în amănunte căci nu-i cazul să urmărim tehnica lui Frege, ci numai să luăm cunoștință de existența sistemului său logic și de modul în care a dezvoltat el întreaga aritmetică. Însă, ca să-și realizeze programul, era necesar ca Frege să stabilească mai întâi o formalizare a logicii.

— Cred, bădiță, că ai vrut să spui „o nouă formalizare”, fiindcă *logica formală* a fost inventată de Aristotel și tot Evul Mediu s-a delectat cu silogismele ei adăugând încă 5 la cele 14 stabilite de filozofii greci.

— Aici m-ai prins! Dar numai în parte, fiindcă eu nu m-am gândit la *caracterul formal al logicii*, așa cum ai interpretat tu vorbele mele, ci la *limbajul formalizat* care înseamnă cu totul altceva.

— Da, înseamnă *calculus ratiocinator* la care s-a gândit Leibniz cu mult înainte de Frege.

— Ce expresii! Nu înțeleg nimic din ele, s-a mirat colegul meu.

— Lasă, a intervenit Teodor Solonar, am să-i explic eu lui Paul despre ce-i vorba: Leibniz s-a gândit că după cum în algebră înlocuind numerele prin litere, toate calculele numerice pot fi formalizate, tot așa în logică s-ar putea stabili un limbaj formalizat sau simbolic, astfel ca orice gândire să se poată exprima mai clar și mai corect prin niște semne speciale supuse la anumite reguli, semne sau simboluri care să înlocuiască cuvintele sau chiar propozițiile simple. Acestui limbaj simbolic Leibniz i-a spus *Caracteristica universală*. Or, folosind acest limbaj format din semne, orice raționament se transformă într-un calcul, aidoma calculului algebric. Iată deci explicată enigma acestui *calculus ratiocinator* sau *calculul raționamentelor*. El este ceea ce numim azi *logica simbolică*.

— Aș vrea să adaug că deși n-a publicat nimic din aceste mărețe planuri ale lui, Leibniz visa că numai în acest fel



s-ar putea statornici o deplină înțelegere între filozofi, căci dacă s-ar isca vreun conflict, spunea el, totul s-ar putea lămurii exact cum se lămuresc doi bancheri: fiecare se așază în fața tejghelei lui, pun banii pe masă și își spun unul altuia „hai să socotim încă o dată și să vedem cine a greșit“.

— Interesant este că nu se poate vorbi de o influență a lui Leibniz asupra urmașilor, a continuat Teodor Solonar, deoarece lucrările lui despre această problemă au rămas în manuscris. Și, totuși, nu se poate spune că ele nu au fost cunoscute de contemporanii lui. Ba, aș remarca un fapt curios, o coincidență dacă vreți, anume că logica simbolică s-a plămădit în Anglia, de către De Morgan și George Boole, cam la 160 de ani după ce Leibniz fusese ales membru al Societății regale de științe din Londra. Fără doar și poate că în răstimpul celor câteva luni cât a stat el acolo, a discutat cu matematicienii englezi și despre „noua caracteristică, cu totul diferită de algebră, care va avea marele avantaj de a prezenta spiritului, tot ce depinde de imaginație, într-un mod natural,

exact și fără de figuri". Descrierea aceasta este chiar a lui Leibniz și se află într-o scrisoare pe care a trimis-o lui Huygens după întoarcerea lui din Anglia. George Boole a pus bazele logicii matematice prin două lucrări: *Analiza matematică a logicii* (1847) și *Legile gândirii*, din 1854. „Există anumite principii generale, bazate pe natura limbajului", scria Boole, „care determină folosirea simbolurilor... Potrivit cu aceste principii, orice acord ce poate fi stabilit între legile simbolurilor logicii și acelea ale algebrei nu poate rezulta decât dintr-un acord de procedee. Cele două domenii de interpretare rămân distincte și independente, fiecare fiind supus legilor și condițiilor proprii". Nu-i curios? Nu-i ca și cum ideile lui Leibniz au lăsat germenii acolo în Anglia și aceia au prins viață abia în mintea lui George Boole? Fantastică îmi apare și întâmplarea povestită de soția lui G. Boole, într-o scriere publicată după moartea acestuia: „Pe când avea 17 ani, George Boole a înțeles, dintr-o dată, în timpul unei plimbări, că în afară de cunoștințele pe care le câștigă prin observații directe, primește și altele dintr-o sursă nedefinită și invizibilă". Soția sa a numit această sursă „inconștientul". Dar, după câte văd eu, m-ați lăsat să o iau razna, în loc să urmărim rezultatele obținute de Frege. Mi se pare că vina o poartă tot prietenul meu, că el mi-a întrerupt șirul ideilor tocmai când voiam să stabilesc care a fost contribuția lui Frege în domeniul logicii simbolice.

— Dacă-i așa, uite că am să tac și am să te las să te descurci singur! Poftim vorbește, că de schimbat văd că ai schimbat-o, nu mai este *logica formală*, ci *simbolică*!

— N-am schimbat-o deloc! Citește în *Micul dicționar filozofic*, ediția a II-a, la pagina 329: „logica s-a constituit sub forma a două discipline fundamentale: logica formală (logica generală) și logica formală modernă (logica *simbolică* numită și logica matematică sau logică)". După ce a publicat *Bazele aritmeticii*, Frege a hotărât să exprime rezultatele sale în limbajul logicii simbolice, limbaj cu care era familiarizat. În 1879 el tipărise *Scrierea conceptuală*, o lucrare ce cuprindea sistemul logic formalizat cu ajutorul cuantificatorilor ce avea

să-i folosească în cercetările ulterioare asupra fundamentelor aritmeticii, astfel încât teoremele să se reducă la niște formule exprimate numai prin *semne* fără ajutorul cuvintelor. În *Legile fundamentale ale aritmeticii*, publicată în două volume, primul în anul 1893 și al doilea în anul 1903, se află prima încercare de a aplica metodele logicii simbolice în scopul de a cerceta și analiza fundamentele aritmeticii. Metoda inaugurată de el se numește azi a *logicismului* și cunoaște o largă dezvoltare, deși simbolismul imaginat de el nu a avut șansa să dăinuie, fiind prea complicat și greu de urmărit.

— Măi bădăie, eu am să te opresc iar în loc, ca să mă lămurești cum se cade, în privința *cuantificatorilor*, care știu că se mai numesc și *conectori*, *functori* și sînt, de fapt, niște *operatori logici* așa după cum semnele $+$, $-$, $\times$, $:$, sînt *operatori aritmetici*. Am trecut de multe ori pe lângă ei, dar nu m-am oprit niciodată ca să-i descos. Hai să o facem acum, cred și văd că și Paul încuviințează!

— Bine, să stabilim cîtiva dintre cei mai simpli operatori propoziționali: pentru *negație* se folosește linioara pusă deasupra variabilei sau expresiei. De pildă $\bar{x}$ înseamnă „nu x ”, pentru *conjunția* „și” semnul $\wedge$ sau uneori punctul. Așa că $x \wedge y$ sau $x \cdot y$ se citește „ x și y ”.

Disjunția sau *alternanța*: „sau” se notează prin $\vee$. Deci, $x \vee y$, se citește „ x sau y ”.

Implicația sau *condiționalul*: „dacă... atunci” se notează fie prin $\rightarrow$ sau prin $\supset$. Simbolul $\bar{x} \rightarrow y$ sau $\bar{x} \supset y$ înseamnă: „dacă nu x , atunci y ”.

Pentru *bicondiționalul*: „dacă și numai dacă”, sînt tot două semne: $\equiv$ și $\leftrightarrow$; $\bar{x} \equiv y$ sau $\bar{x} \leftrightarrow y$ se citește „dacă și numai dacă nu x atunci y ”.

Generalizarea unei variabile se face prin *cuantificatorul universal* exprimat prin închiderea variabilei respective între două paranteze rotunde. Astfel (x) se citește: „pentru fiecare valoare a lui x ”, iar *particularizarea* variabilei se face prin *cuantificatorul existențial* notat fie $E(x)$ fie $\exists x$ și se citește: „există o valoare a lui x astfel că...” Atît aș avea eu să-ți spun și aș mai observa, înainte de a mă reîntoarce la subiectul meu, că operatorii: $\equiv$, (x) și $E(x)$ se aplică unei singure expresii sau

variabile, pe cînd toți ceilalți conectori implică prezența a două expresii sau variabile, chiar dacă s-ar întîmpla ca acelea să fie identice; astfel avem: „nu x ” sau „ $\bar{x}$ ” dar „ x sau y ” sau „ $x \vee y$ ”.

— Da, atît mi-ajunge pentru a-mi satisface curiozitatea în legătură cu operatorii logicii folosiți acum, dar nu și cu acei inventați de Frege. Văd că între *Bazele aritmeticii* și primul volum din *Legile fundamentale* au trecut 9 ani și apoi încă 10 ani pînă să apară cel de-al doilea volum, destulă vreme ca cei interesați să fi sesizat aceste lucrări. Care a fost impresia sau, poate, surpriza produsă de ele?

— Bine ai spus: *surpriza*, dar nu pentru cititori, cît pentru Frege!

— Asta-i curată șaradă, bădie Solonar! Și se cere urgent dezlegată!

— Are dreptate Paulică, cum adică surpriză pentru Frege? Mai ales cînd ne-ai spus că notațiile lui erau greu de urmărit...

— Iacă așa cum ați auzit! Într-o bună dimineată de la începutul anului 1903, Frege primește o scrisoare din Anglia de la un tînar pe nume Bertrand Russell, care se ocupa pe atunci de aceeași problemă...

— Nu cumva-i vorba de filozoful Russell, cunoscut în lumea întreagă, care a murit în anul 1970?

— Ba da, numai că pe atunci nu avea faima pe care i-o va da opera lui creată în timpul celor peste șase decenii ce vor urma. Publicase doar cîteva lucrări interesante de filozofie și matematici iar în anul 1900 a luat parte, împreună cu profesorul și prietenul lui A.N. Whitehead, la Congresul de filozofie care s-a ținut în acel an la Paris. Acolo s-a trezit interesul lui pentru cercetarea aritmeticii și exact pe aceeași cale ca aceea urmată de Frege. S-a întîmplat așa fiindcă la Congres, Bertrand Russell a avut ocazia să-l cunoască și să asculte comunicarea lui Giuseppe Peano, un binecunoscut matematician și logician italian, comunicare ce cuprindea rezultatele sale cu privire la cercetarea bazelor aritmeticii prin metoda logicii simbolice. Peano publicase în anul 1889 *Principiile aritmeticii*, expuse printr-o nouă metodă și avea pregă-

tită o altă lucrare, ce a apărut în anul 1901, cu titlul *Formular matematic*. În ambele se ocupa de cercetarea bazelor axiomatice ale aritmeticii, raționamentele fiind expuse în limbajul formalizat al logicii simbolice.

— Prin urmare exact ideea lui Frege!

— Da și nu. *Da*, fiindcă și Peano a folosit transpunerea într-un limbaj simbolic a teoremelor aritmeticii, ca și Frege, dar *nu*, fiindcă Peano folosește anumite axiome ca să ajungă la formularea teoremelor, ceea ce Frege consideră că nu-i necesar. Frege a construit aritmetica în mod genetic și nu axiomatic.

— Iar Russell ce cale a ales? Cu alte cuvinte de partea cui a trecut?

— Russell cunoștea lucrările lui G. Boole, iar pe acelea ale lui Peano le-a aflat aici. Se pare că el nu cunoștea încă lucrările lui Frege. El a remarcat, de îndată, că Peano a îmbogățit vocabularul simbolic introdus de Boole, adăugându-i semne care să exprime noțiunile logice de felul: „este conținut în” sau „mulțimea tuturor x -lor astfel că” sau „există un” etc. I-au plăcut aceste inovații și le-a adoptat, însă, în același timp, și-a propus să depășească concepția axiomatică a lui Peano, considerând că aritmetica poate fi privită ca o parte a logicii. Așa fiind, independent de Frege, Russell a pornit de la rezultatele stabilite de Cantor în teoria mulțimilor și a încercat să stabilească, pe cale logică, folosind de la început notațiile lui Peano, întreaga aritmetică. În memoriile sale, el afirmă că îndată ce a început acest studiu, prin 1901, a dat peste paradoxul mulțimii mulțimilor și de atunci toate gândurile lui s-au concentrat la această problemă, sperând să găsească o soluție. În acest scop, a citit și lucrările lui Frege constatând cu surpriză că drumul pe care a apucat fusese trasat mai înainte de Frege. Aceasta l-a îndemnat să-i scrie scrisoarea despre care am pomenit.

— Adică a venit vremea să ne citești scrisoarea lui Russell?

— Nu! Nu am să o citesc, ci am să-l las pe Frege să ne spună el singur ce impresie i-a făcut. Mărturisirea se află la sfârșitul celui de al doilea volum al *Legilor fundamentale ale aritme-*

ficii, apărut în anul 1903: „Nimic nu-i mai dureros pentru un om de știință, decât să-și vadă bazele operei sale surpându-se exact în clipa când a crezut că a terminat-o. Am fost pus în această situație de o scrisoare a domnului Bertrand Russell primită atunci când lucrarea era aproape dată la tipar“.

— Dar ce cuprindea scrisoarea, tot nu știm.

— În scrisoare, Bertrand Russell îl informa pe Frege că a descoperit un paradox în stare să dea o lovitură fatală întregului sistem logic pe care se baza nu numai teoria lui Frege asupra fundamentelor aritmeticii, ci și teoria mulțimilor a lui Cantor! Paradoxul care fusese descoperit, în același timp și independent de Russell, de către Ernst Zermelo, se referă la inconsistența noțiunii de *clasă* sau de *mulțime a tuturor mulțimilor care nu se conține pe ea însăși ca element*, noțiune pe care se sprijinea însăși definiția numărului natural, așa cum o formulase Frege.

— Asta-mi pare într-adevăr curios! Nu-mi pot imagina de ce să existe contradicție, căci asta înseamnă, de fapt, inconsistență, în noțiunea de mulțime a tuturor mulțimilor. Într-adevăr, Frege a folosit această concepție ca să definească numărul întreg!

— Te-ai grăbit și nu ai formulat exact întrebarea. Nu-i vorba de mulțimea tuturor mulțimilor în general, ci numai de aceea particulară „care nu se conține pe ea însăși ca element“. Ca să fie mai clar, am să-ți atrag atenția că din noțiunea de mulțime se pot desprinde *două categorii diferite*, anume:

- (1) mulțimi ce se conțin pe ele însele ca element, și
- (2) mulțimi ce nu se conțin pe ele însele ca element.

De pildă, mulțimea tuturor mulțimilor care cuprind fiecare mai mult decât trei elemente este o mulțime care e formată ea însăși din mai mult decât trei elemente, așadar, această mulțime se cuprinde și ea ca element al mulțimii numite. La fel se poate spune despre mulțimea tuturor noțiunilor abstracte. Fiind ea însăși o noțiune abstractă, rezultă că această mulțime face parte, ca element, din mulțimea noțiunilor abstracte. Dar dacă ne gândim la mulțimea florilor dintr-o giasă, această mulțime este un număr, numărul cardinal al ei și nu o floare. Așadar, această mulțime nu se cuprinde,

nu face parte din mulțimea florilor. Același lucru îl putem spune despre mulțimea tuturor cărților dintr-un raft, despre mulțimea tuturor creioanelor dintr-o cutie, și așa mai departe. Acum, dacă ne punem întrebarea: „din ce categorie face parte mulțimea M a tuturor mulțimilor ce nu se conțin pe ele însele ca element?” — nu putem răspunde decât printr-un paradox.

— Cum vine asta? Mi se pare că ea face parte din categoria a doua.

— Bine, să admitem că-i așa. În acest caz, M fiind o mulțime ce nu se conține pe ea însăși ca element, înseamnă că ea este de aceeași natură cu toate mulțimile ce nu se conțin pe ele însele ca element și deci, prin definiție face parte din categoria întâia!

— Dar, dacă presupunem că M face parte din categoria întâia, atunci ea trebuie să se găsească, prin definiție, în categoria a doua, fiindcă M reprezintă mulțimea tuturor mulțimilor ce nu se conțin ca element!

— Ai dreptate, Paulică, acum văd că această mulțime duce la paradox. Or, tocmai ea a fost luată de Frege ca definiție a cardinalului unei mulțimi fiindcă, de pildă, mulțimea tuturor mulțimilor care cuprind 5 elemente este formată din mai multe mulțimi decât 5, ceea ce înseamnă că nu se cuprinde pe ea ca element!

— Acum te-ai convins?

— Da! Prin urmare, Frege a trebuit să renunțe la opera sa, după cum pare să rezulte și din nota ce ne-ai citit-o.

— Da de unde! E adevărat că paradoxurile lui Russell au dat de furcă matematicienilor, însă chiar Russell a fost unul dintre cei mai puternici susținători ai logicismului. Tot în anul 1903, el a dat publicității lucrarea sa *Principiile matematicii*, în care pretinde că „toată matematica pură se ocupă de noțiuni ce se pot defini printr-un număr mic de *noțiuni logice fundamentale*, iar toate propozițiile ei sînt deductibile dintr-un număr mic de principii logice”.

— Va să zică Russell merge chiar mai departe decât Frege, fiindcă el nu se mărginește numai la logicizarea aritmeticii,

ci susține că întreaga matematică poate fi redusă la logică! Dar atunci, cu paradoxul cum a rămas?

— Deocamdată Russell îl prezintă fără să-i dea vreo rezolvare. Mai mult chiar, el redă, într-un appendice, lucrarea lui Frege, ceea ce arată că s-a silit să-i descifreze notațiile și să i le traducă în noile ideograme, adică în limbajul formalizat stabilit de Peano. Datorită tocmai acestei traduceri a fost atrasă atenția matematicienilor asupra contribuției lui Frege în problema logicismului, căci *Principiile matematice* au avut un mare succes. Printre altele, de pildă, ele au atras atenția lui A.N. Whitehead, care i-a propus lui Russell să continue cercetările împreună. Astfel s-a născut cartea de bază a logicismului, *Principia mathematica*, în trei volume, tipărită între anii 1910—1913, în prima ediție, și între anii 1925—1927, ediția a doua. În memoriile sale, Russell observă că timp de 10 ani a fost o colaborare rodnică, fiindcă „nici unul din noi doi nu ar fi putut să scrie el singur această carte”. Interesantă este și observația care încheie amintirile despre această lucrare așa de mult comentată sau consultată: „Chiar împreună și cu ajutorul discuțiilor reciproce, munca a fost așa de grea, încât la sfârșit, amîndoi ne-am lăsat de logică matematică cu un fel de greață și fiecare am început să lucrăm în alte domenii, așa că nu a mai fost posibilă o colaborare a noastră”.

— Vor mai fi fost poate și alte motive!

— Probabil. Whitehead, de pildă, era de părere că despărțirea ar fi fost cauzată și de punctele lor de vedere filozofice, care erau diferite. Dar nu acest lucru ne interesează acum pe noi, ci ceea ce au realizat ei în *Principia mathematica*, în legătură cu paradoxul despre care am vorbit. Analizându-l, ei au ajuns la concluzia că el își are originea în cercul vicios ce se naște din însuși faptul că o mulțime de elemente poate deveni element al unei mulțimi. Ca să evite paradoxul, ei au limitat noțiunea de mulțime, considerînd că „un element a cărui definiție implică totalitatea elementelor unei mulțimi, nu trebuie să aparțină la acea mulțime”. Pornind de la această concepție, Russell și Whitehead au creat *teoria tipurilor logice* de diverse ordine, cu ajutorul căreia au putut stabili o nouă traducere

logică a aritmeticii, în care să nu mai poată apărea vreun paradox.

— N-am pretenția și știu că nici nu se poate să te oprești acum, ca să-mi expui teoria tipurilor logice, dar vreau să știu ce se înțelege prin această noțiune de *tip logic de diferite ordine*?

— Dacă un element sau un obiect face parte dintr-o mulțime, îl privesc ca pe un element de *tipul unu*; atunci când o anumită proprietate a acelui obiect devine, la rândul ei, un element sau un obiect al altei mulțimi, această proprietate este considerată ca obiect de *tipul doi* și așa mai departe, presupunând că acest obiect de *tipul doi* prezintă o calitate ce intervine într-un raționament sau într-o nouă mulțime cu titlul de element, calitatea devine un element de *tipul trei*. Aș mai putea spune același lucru și așa: „ca *mulțime de tipul unu* socotesc o mulțime de elemente; ca *mulțime de tipul doi*, consider o mulțime de mulțimi de elemente; ca *mulțime de tipul trei*: o mulțime de mulțimi de mulțimi de elemente și așa mai departe”. În *Principia mathematica*, de pildă, autorii scriu că: „atît prin *principiul cercului vicios*, cît și prin intuiție directă, ajungem la concluzia că funcțiile pentru care un obiect *a* poate fi argument, nu sînt capabile să fie argumente, la rândul lor, pentru obiectul *a* și ele nu au nici un punct comun cu funcțiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel, sîntem conduși să construim o ierarhie a funcțiilor”. Bazîndu-se pe acest principiu, Russell și Whitehead găsesc soluția nu numai a paradoxului care-i obseda, ci și a tuturor paradoxurilor „care au asediat logica matematică”, ca să folosesc expresia lor.

— Vrei să spui că se ocupă și de paradoxul cretanului mincinos?

— Desigur, și de acesta și de multe altele care au fost descoperite în decursul veacului al XIX-lea.

— Atunci înseamnă că logicismul a cîștigat partida!

— Nu se poate afirma această, logicismul are mulți partizani, dar și mulți care-l contestă. Cei care-l contestă susțin că matematica nu poate fi redusă la logică, că ea nu are un caracter tautologic, cei ce susțin logicismul afirmă contrariul, motivînd că omul nefiind atotștiutor, nu-și dă seama *imediat*

de validitatea unui rezultat matematic, ci este obligat să urmărească un șir întreg de transformări tautologice, fără să-și dea seama de aceasta.

— Argumente interesante de o parte și de alta, nu vrei să-ți notezi în caietul matalo o zi destinată numai lor?

— Nu, că dacă va fi să le discutăm le-om discuta, nici nu știi de unde sare iepurele! Nu vezi? Cine s-a gândit că azi ne vom rătăci prin domeniile formalismului sau ale metodei axiomatice, ale logicismului...?

— Aveți dreptate că ne-am rătăcit, fiindcă pornisem pe cărările croite de David Hilbert, așadar ne considerăm în domeniul axiomatizării aritmeticii și apoi, dintr-o dată, ne-am găsit în cu totul alt domeniu, acela al logicismului!

— Ai foarte multă dreptate, dragă Paul, asta însă se datorește colegului matalo. Dacă ești de partea mea, eu aș dori să ne întoarcem la Hilbert, fiindcă nu v-am spus tocmai ceea ce mi se pare mie mai surprinzător!

— Desigur! Paul în sus, Paul în jos, eu nu mai contez! Poftim! Adică eu nu aș fi curios să știu ce a mai gândit Hilbert după anul acela 1905, când l-am părăsit? Dealtfel, deși dai vina pe mine, după câte țin eu minte, atunci bănuiam că-ți convenea această hoinăreală!

— E adevărat că am dorit să străbatem și alte cărări ca să vedem ce se mai întâmplă în jurul anului 1905, acela în care apărea lucrarea lui Hilbert *Despre bazele logicii și aritmeticii*. Te-am necăjit degeaba!

— Ai făcut bine, așa ni s-a prezentat și un alt aspect al problemei fundamentelor aritmeticii, am aflat că tocmai pe atunci Frege, Russell, Whitehead și cine mai știe care, se străduiau să dovedească faptul că aritmetica nu-i decît un capitol din logică. Russell tipărise de un an cartea sa *Principiile matematice*, în care prezenta și contribuția lui Frege iar acum lucra împreună cu prietenul său ca să stabilească teoria tipurilor.

— Vedeți? Cunoscînd acestea aș putea să vă citesc ce credea Hilbert despre Frege și, bineînțeles, cele spuse se referă și la Russell. Pasajul se află tot în *Despre bazele logicii și*

aritmeticii, compus în 1904 dar tipărit în 1905: „Dintre învâțații care au pătruns mai adânc în esența numărului întreg... G. Frege își propune să fundamenteze legile aritmeticii prin intermediul logicii, aceasta fiind concepută în sensul tradițional. El are meritul de a fi înțeles corect proprietățile esențiale ale noțiunii de număr întreg... însă el se expune tocmai acelor paradoxuri din teoria mulțimilor care se găsesc, de pildă, în conceptul de mulțime a mulțimilor...”. Spre deosebire de Frege, Hilbert a prezentat problema sub un aspect cu totul nou. El a arătat, după cum ați văzut, că necontradicția geometriei se bazează pe necontradicția aritmeticii iar în ceea ce privește demonstrarea necontradicției aritmeticii, el consideră sau, mai bine zis, sugerează că ar trebui creată o altă disciplină fundamentală, fiindcă la logică nu se poate recurge! Însă, în timp ce Russell și alți matematicieni lucrau la desăvârșirea operelor lor, care să răspundă cât mai bine la stabilirea unei soluții în problema fundamentelor aritmeticii, Hilbert a părăsit aceste cercetări și nu a revenit la ele decât prin anul 1917, când ține o conferință despre *gîndirea axiomatică* și lansează ideea de a face din „însăși noțiunea de demonstrație matematică” obiect de cercetare. Ideea este adîncită și dezvoltată într-o serie de comunicări făcute între anii 1922 și 1928, ani în care apare și lucrarea sa *Fundamentele matematicii*, în care este expusă concepția lui despre *Metamatică* sau *Teoria demonstrației matematice*, teorie prin care spera să fi găsit metoda de a stabili nu numai necontradicția aritmeticii, dar și a logicii, adică și a teoriei mulțimilor.

— Metamatică ai spus? Cuvîntul înseamnă ceva „despre”, „cu privire la”, „pe lingă” sau „în jurul” matematicii! Cum ar veni asta?

— Exact cum ai spus. Are să-ți explice chiar Hilbert mai bine decât mine. În anul 1925, el scria: „Există o cale de a trata paradoxurile fără a comite o trădare față de știința noastră... Din paradisul pe care ni l-a creat Cantor, nimeni nu ne va alunga... dacă reușim să elucidăm complet natura infinitului”.

— Frumoasă frază!

— Da, a plăcut multor matematicieni și de aceea ea este adesea citată. Pe această idee, Hilbert își sprijină teoria demonstrației. „Am văzut mai înainte“, scria el în *Despre infinit*, „că infinitul nu este de găsit nicăieri în realitate, oricare ar fi experiențele... la care am apela... Nu-i evident că, presupunând că într-un sens oarecare am cunoaște realitatea infinitului, ne-am lăsat derutați de faptul că întâlnim așa de des în realitate dimensiuni extraordinare, în mare și în mic? Iar în ceea ce privește raționamentul logic concret... el nu ne-a înșelat decât dacă l-am aplicat la definiții abstracte arbitrare; în acest caz, am aplicat nepermis raționamentul concret... Recunoscând că astfel de condiții preliminare există și că trebuie ținut seama de ele, ne găsim în concordanță cu filozofii, îndeosebi cu Kant, care a arătat că matematica... nu depinde numai de logică și de aceea nici nu poate avea ca fundament numai logica, din care cauză și străduințele lui Frege... trebuiau să eșueze. Mai curînd în reprezentare există ceva dat, ca o condiție preliminară pentru aplicarea raționamentelor logice și pentru efectuarea operațiilor logice: anumite obiecte extralogice, concrete, care există intuitiv, ca trăire efectivă nemijlocită înainte de orice gîndire... Îndeosebi în matematică, înseși semnele concrete sînt obiectele studiului nostru, a căror formă, ca urmare a atitudinii noastre, este imediat clară și se poate recunoaște“.

— Aceasta-i o introducere în metamatematică, după cîte îmi dau eu seama, bădie Solonar. Așa că, înainte de a continua, aș vrea să-mi precizez, pentru mine, deosebirea netă asupra căreia insistă Hilbert, dintre caracterul logicismului și acela preconizat de el. Cred că o deducere silogistică este *analitică*, fiindcă, într-un silogism, concluzia se află chiar în premise și poate fi exprimată prin reguli fixate dinainte, pe cînd în cazul axiomatizării, raționamentele logice pornesc de la anumite noțiuni primare, intuitive, și de la anumite relații de legătură. Pînă aici totul mi-e clar, dar nu văd cum poate înlătura Hilbert noțiunea de infinit, care în nici un caz nu-i concretă, așa cum o spune el singur. Cînd folosesc litera *a* în loc de un număr și spun „există *a*“, înseamnă că în

mod implicit folosesc noțiunea de infinit, fiindcă prin *a* înțeleg orice număr, oricât de mare sau de mic. Ce se întâmplă în acest caz? Cum aplic aici raționamentul logic?

— Tocmai asupra acestui lucru ne va spune Hilbert părerea sa, stabilind principiile metamatematicii: „Pentru că propozițiile neexprimând afirmații finite (formulele) nu au în sine nici o semnificație, operațiile logice nu pot fi aplicate față de ele concret ca în cazul propozițiilor finite. Este deci necesar să formalizăm operațiile logice și chiar demonstrațiile matematice; aceasta cere o transpunere a relațiilor logice în formule astfel încât trebuie să adăugăm la semnele matematice și semne logice ca: $\wedge$ (și), $\vee$ (sau), $\rightarrow$ (implică), $\neg$ (nu) și, în afară de variabilele matematice *a, b, c, ...*, trebuie să folosim și variabile logice, anume variabile propoziționale *A, B, C, ...*. Cum se poate face acest lucru?... Avem calculul logic elaborat mai dinainte... În calculul logic noi posedăm un limbaj simbolic, capabil de a prinde în formule propoziții matematice și de a exprima raționamentul logic prin procese formale. Întocmai ca la trecerea de la aritmetica concretă la algebră, considerăm semnele și simbolurile de operație ale calculului logic desprinse de semnificația lor concretă. Prin aceasta noi căpătăm, în locul științei matematice concrete, comunicată prin limbaj obișnuit, un stoc de formule cu semne matematice și logice care iau naștere unele din altele, după anumite reguli“. În *Fundamentele metamatematicii*, din 1928, Hilbert reia această problemă și, după ce o analizează sub diferitele ei aspecte, trage concluzia: „Ideea fundamentală a teoriei mele despre demonstrație nu este altceva decât de a descrie activitatea intelectului nostru, de a accepta un protocol asupra regulilor, conform cărora gândirea noastră procedează de fapt. Gândirea se desfășoară tocmai paralel cu vorbirea și scrierea, prin formare și juxtapunere de propoziții“.

— Prin *formarea și juxtapunerea de propoziții*, vrea să spună de fapt *stabilirea formulelor* compuse din semne logice și aritmetice?

— Da. El insistă asupra acestui fapt: „demonstrația formalizată, ca și o cifră, este un obiect concret și perceptibil

în ansamblu. Ea este de la început pînă la sfîrșit comunicabilă". Însă, trebuie să înțelegem bine un lucru și să nu-l confundăm cu altul. Anume: *demonstrația formalizată* nu cere cuvinte, ea se mulțumește cu aceste formule, cu acest *desen* care pentru un profan, pentru cineva care nu a învățat aceste semne și regulile de a le folosi, nu au nici un înțeles. Privind o pagină pe care sînt înșirate aceste combinații de semne ce traduc teoremele unui capitol din aritmetică, de pildă, el nu vede altceva decît un desen abstract care poate să spună că-i frumos sau urît, că vede în el anumite simetrii sau asimetrii interesante. Dacă formulele nu au avut pentru el vreun înțeles, aceste observații *au un înțeles* dar ele nu se mai exprimă prin semnele folosite ca să se scrie teoremele de matematică, ci prin *cuvintele obișnuite* în vorbirea de toate zilele. Avem deci, față în față, două lucruri deosebite: pe de o parte *matematica propriu-zisă*, adică pagina cuprinzînd *anumite configurații de semne* și, pe de altă parte, un *comentariu* compus din cuvinte obișnuite, comentariu mai mult sau mai puțin competent, după cum cel ce privește desenul sau configurația de semne din fața lui, le înțelege rostul sau nu. Acest comentariu *nu mai este matematică*, chiar dacă va cuprinde *expresii matematice*, acest comentariu este *metamatematică*, în el se vorbește „despre matematică”, se afirmă ceva „cu privire la matematică”, este ceva adăugat *pe lângă matematica cuprinsă în configurația de semne*. E limpede?

— Nu știu încă. Uite am să aleg un exemplu și matale, bădie Todirel, vei putea decide dacă a fost limpede sau nu. Dacă am înțeles eu, atunci e sigur că și Paul a înțeles, dar nu și invers, de aceea dau eu buzna la răspuns. Uite, să scriu una dintre cele mai simple expresii aritmetice: $9 \times 5 = 45$. Această formulă aparține aritmeticii, este deci aritmetică formalizată fiindcă nimeni dintre cei ce nu cunosc cifrele și operația de înmulțire nu vede în această formulă altceva decît un desen, o configurație de semne goale.

— Perfect, formula aceasta este matematică propriu-zisă. Acum mai departe!

— Privind formula, Paul poate spune...

— Atunci să spună Paul că nu are nevoie de interpret sau avocat!

— Da, pot să spun, sau să gîndesc, cam așa: mai întîi că văd înaintea mea o formulă din tabla înmulțirii, care-i scrisă *corect*. Aceasta fiindcă se respectă convenția ca de o parte și de alta a semnului egal să existe cîte o expresie numerică și fiindcă cele două expresii numerice sînt într-adevăr echivalente, adică se pot înlocui una prin alta. Tot acest comentariu al meu aparține *metamatematicii*. Așa ți-ai închipuit și tu că am să vorbesc?

— Cam așa, adică, poate că ceva mai puțin școlăresc!

— Am să vă dau și eu un exemplu, acum după ce văd că totul a mers ca pe roate. E, dealtfel, un exemplu clasic, dar prin el ne putem continua discuția. Consider șirul de formule: $x = x$; $60 = 60$; $60 \neq 60$. Ce puteți spune despre el?

— Că acest șir de formule aparține matematicii, respectiv capitolului *aritmetică*; că prima este o identitate, a doua se obține din prima dacă înlocuim variabila numerică x cu numărul 60, iar a treia formulă *nu există*, fiindcă nu a fost derivată din prima după regulile stabilite în aritmetică. Mata, bădie, ai făcut matematică, iar eu metamatematică!

— Asta-i așa, dar nu-i numai atît. Faptul că ai putea recunoaște dacă o formulă este corectă și alta nu și, mai ales, că ai putea constata că *nu pot exista două formule care să afirme în același timp un adevăr și opusul lui*, ar constitui dovada că aritmetica este lipsită de contradicții, adică este consistentă. La acest rezultat voia să ajungă Hilbert prin *teoria demonstrației* adică prin analiza riguros logică a formulilor — configurații. Aceasta era sarcina pe care i-a atribuit-o Hilbert metamatematicii: să demonstreze necontradicția matematicii, în cazul nostru, a aritmeticii.

— Acum mi se pare că văd lucrurile foarte clar: pe de o parte ai *limbajul matematicii*, format din semne lipsite de orice asociații intuitive. Cu aceste semne se pot face operații



după anumite reguli precis definite. Așadar, ai la îndemână un instrument perfect cu care să pătrunzi în natura raționamentului matematic și să-i urmărești desfășurarea. Însă, rezultatele ce le-ai stabilit astfel trebuie *comunicate*, iar comunicarea nu o poți face în mod formalist, ci prin vorbirea obișnuită și aceasta cere un nou limbaj, acela al metamatematicii, și astfel se separă matematica de metamatematică, adică de teoria demonstrației!

— Da, însă, aș vrea să mai adaug că Hilbert considera că în metamatematică raționamentele aritmetice trebuie să se limiteze numai la procedee finite fiindcă „nu putem avea idei clare decât despre obiectele *determinate și în număr finit*”; așadar o condiție principală în demonstrarea necontradicției aritmeticii era de a folosi numai formule în *număr finit* și cuprinzând un *număr finit de operații*. Astfel, pe când Hilbert considera că a putut stabili consistența absolută a aritmeticii și chiar era convins că a realizat ceva mai mult, adică pe lângă consistența aritmeticii a dovedit și independența axiomelor ei, ca un trăznet din senin apare, în anul 1931, articolul lui Kurt Gödel, intitulat: „Despre propozițiile formal nedecidabile din *Principia mathematica* și din sistemele înrudite”.

— Vreți să spuneți că și Hilbert a ajuns în situația în care s-a găsit Frege odinioară?

— Ba mai mult, că exact așa după cum Russell i-a tăiat avântul lui Frege, acum Gödel îi răspunde la fel lui Russell și lui Hilbert, fiindcă, după cum știm foarte bine, deși de pe poziții diferite, atât Russell cât și Hilbert folosesc logica simbolică drept mijloc de cercetare a fundamentelor aritmeticii. Gödel dovedește că nu-i posibil să existe un sistem complet formalizat care să cuprindă întreaga aritmetică și pentru care se poate demonstra consistența lui, prin mijloace finite. Concluziile sale au două aspecte: mai întâi acesta despre care am pomenit, că o demonstrație metamatematică a necontradicției aritmeticii formalizate are nevoie de mijloace de

Inferență mai puternice decât acelea folosite de metamatematică (fiindcă acestea sînt de aceeași natură cu acelea pentru stabilirea teoremelor) și apoi că, atît *logicismul* cît și *orice sistem axiomatic* sau de altă natură, care ar încerca să dezvolte aritmetica, este *esențial incomplet*, adică în orice sistem se pot stabili propoziții aritmetice noi, care nu fac parte din sistemul dat și despre care nu se poate afirma dacă sînt sau nu adevărate fără a se introduce axiome noi și faptele s-ar repeta după introducerea acestora.

— Și cum a demonstrat Gödel teorema sa? Prin reducere la absurd?

— A, nu! Tocmai în aceasta constă puterea demonstrației sale, că el a reușit să construiască în mod efectiv o propoziție formală care nu făcea parte din sistemul formalizat, nici ea și nici negarea ei, și care aparține sistemului fără să se știe dacă e adevărată ea sau negarea ei.

— Atunci ce s-a întîmplat?

— Deocamdată s-a ajuns la descoperirea unui fapt esențial, anume că necontradicția unui sistem logic nu se poate demonstra cu mijloacele logice folosite în stabilirea acelui sistem. Apoi, s-a mai înțeles că nu-i valabilă presupunerea că adevărata natură a adevărului matematic ar fi stabilită prin demonstrabilitatea lui.

— Și că trebuie lăsate deoparte restricțiile finitiste, nu?

— A, da! În această privință, pot să vă spun că în anul 1936, G. Gentzen a reușit să dovedească, în mod cert, necontradicția aritmeticii formalizate, sprijinindu-se în raționamentul său pe *numerele ordinale transfinit*. Demonstrației lui Gentzen i-au urmat altele care au venit astfel în afirmarea teoremei lui Gödel, arătînd totodată că aceasta nu are un caracter distructiv, ci numai de îngrădire. Ea a condus la dezvoltarea metamatematicii sub o nouă înfățișare, nefinitistă. De altfel, după ce între 1934—1938 Hilbert a scris împreună cu Bernays alte două volume asupra *Fundamentelor ma-*

lematicii, în care a trebuit să țină seama de rezultatele lui Gödel, Bernays recunoștea că „nu se mai poate vorbi de o teorie a demonstrației în sensul primitiv al punctului de vedere finitist”.

— Din cele ce am discutat astăzi, mi se arată iar că noi nu putem descoperi singuri și dintr-o dată totul, ci treptat și numai cu contribuția diferitelor spirite care se concentrează asupra aceleiași probleme.

— Desigur, Paulică, pe de o parte este bine cunoscut faptul că gândirea se depășește mereu pe ea însăși și nu o poate închide nici un sistem filozofic, oricât ar pretinde că ar fi de definitiv și că ar fi reușit să explice, adică să cuprindă în el, toate cunoștințele actuale, pe de altă parte, aș spune că tocmai această căutare dă farmec străduințelor intelectuale, făcându-le să-și fie suficiente lor însăși și prin aceasta să-i silească pe savanți să sacrifice toată libertatea de dragul acestei cercetări, într-un domeniu sau altul.

— Nu numai pe savanți, dar și pe niște simpli muritori ca noi, discuția asupra acestor probleme ne-a făcut să uităm timpul. Iată, a trecut ziua, s-a întunecat și noi nici nu am aprins lumina. Abia acum mi-am dat seama de asta, când am vrut să închidem discuția noastră cu câteva rînduri scrise de Poincaré în volumul *Valoarea științei*. Mi-a venit în minte acest pasaj când v-am auzit filozofind. În aceste rînduri este vorba și de cercetările logicii și de jocul de șah, de la care, de fapt, a pornit toată discuția noastră, deși, n-aș spune că ele ar avea vreun caracter rezumativ sau concludent în legătură cu cele ce am discutat noi astăzi. Dacă vreți, am să vi le citesc numai pentru frumusețea lor: „Logicianul descompune fiecare demonstrație într-un număr mare de operații elementare. După ce le-a examinat și a constatat că fiecare e corectă, a înțeles el oare adevăratul sens al demonstrației?... Evident că nu, noi nu posedăm încă realitatea întreagă, acel ceva ce dă unitatea demonstrației ne va scăpa complet. Analiza pură ne pune la dispoziție o mulțime

de procedee despre care ne garantează infailibilitatea... Pe care îl vom alege? Ne trebuie o facultate care să ne facă să vedem scopul din depărtare și această facultate este intuiția. Ea este necesară exploratorului ca să-și aleagă calea și acelaia care merge pe urmele lui și vrea să înțeleagă de ce a ales-o. Dacă asistați la o partidă de șah, ca să înțelegeți partida, nu va fi de ajuns să cunoașteți regulile de mutare ale pieselor... Așa procedează cititorul unei cărți de matematici dacă nu-i decît logician. A înțelege partida este cu totul altceva, înseamnă să înțelegi de ce jucătorul folosește această piesă și nu alta pe care ar fi putut să o miște fără să greșească regulile jocului. Înseamnă să pricepi rațiunea intimă care face din acea serie de mutări succesive un fel, de tot organizat“.

PROBLEMA GÎNDIRII MATEMATICE

sau

UNELE INCURSIUNI

PRIN MEANDRELE RAȚIONAMENTULUI

Luni dimineată, după plecarea colegului Paul, i-am zis prietenului meu:

— Măi bădie, dacă ți-aș spune ce problemă mi-a trecut adineauri prin minte, ai crede că am căzut în mintea copiilor!

M-a privit cu ochi strălucitori, ca firul de iarbă în bătaia soarelui, și mi-a răspuns:

— Dacă îți închipui asta, înseamnă că nu ții seamă de legea compensației. După grelele probleme discutate ieri, mintea își caută, în mod firesc, compensație în altele mai ușurele, dintre care nu ar fi excluse nici acelea discutate odinioară pe la șezători: cum să treci capra, varza și lupul peste punte, sau cum să împarți vinul...

— Tocmai la problema asta mă gîndeam. Cum am ajuns la ea? Ce mecanism s-a declanșat și mi-a adus-o înainte, habar n-am. Știu numai că m-am pomenit deodată cu ea, plocon înaintea mea. Ți-o mai amintești?

— Cum să nu! Doi oameni au 8 litri de vin într-o butelcă și vor să-l împartă pe din două, dar nu au decît un vas de 5 litri și altul de 3 litri. Cum ajung la împărțea?

— Să văd dacă mai știu. Mai întîi umple vasul de 5 litri. În butelcă i-au rămas 3 litri. Acum toarnă din vasul de 5 litri și umple pe cel de 3 litri, pe care-l varsă peste ceilalți 3 litri și astfel a ajuns să aibă 6 litri și 2 litri.

— Pînă acum e bine, dar lui îi trebuie 4 litri.

— Ce-a fost greu a trecut. Acum deșartă cei doi litri din vasul de 5 litri în cel de 3 litri și umple din nou vasul de 5 litri. În butelcuță i-a rămas astfel 1 litru și peste el toarnă măsura de 3 litri, pe care a umplut-o din vasul de 5 litri.

— După cum vezi, problema nu era chiar așa de simplă și a cerut destulă chibzuială. Trebuia să stabilești, pe cale mintală, toate treptele experimentale care să te ducă, în mod logic, la dezlegarea ei.

— De acord, numai că eu aș mai fi adăugat: „cu maximă economie”.

— Mă voi opri la faptul că raționamentul urmărea să stabilească cum vreau să se desfășoare, în mod logic, diferitele faze ale experienței. Aceasta presupune că experiențele erau cunoscute dinainte și raționamentul se baza pe ele.

— Bineînțeles, altfel încercările ar fi dus numai la trecerea vinului dintr-un vas în altul. Însă acest lucru nu-i specific numai raționamentului de față. Euclid l-a folosit în mod curent în demonstrațiile lui. Să luăm, de pildă, demonstrația cu privire la egalitatea a două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ (figura 6) care au câte două unghiuri respectiv egale; $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$ și latura comună lor egală, $AB = A_1B_1$. Cum stabilește egalitatea? Presupune că suprapune cele două triunghiuri astfel ca unghiurile A și A_1 să coincidă, adică laturile AC și A_1C_1 să se suprapună, respectiv, peste A_1C_1 și A_1B_1 . Mai mult, din egalitatea $AB = A_1B_1$ rezultă că și vîrfurile unghiurilor B și B_1 coincid, de unde și latura BC se suprapune peste B_1C_1 etc.

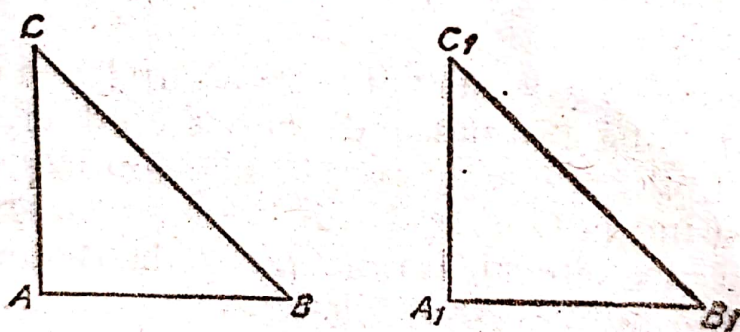


Figura 6

Cum ar fi putut face această demonstrație dacă nu i-ar fi fost bine cunoscută operația de suprapunere a figurilor tăiate din lemn, pergament sau confecționate din sîrmă ori cine știe ce alt material? El o considera posibilă mintal și știa foarte bine că prin această deplasare a figurilor, ele

nu se îndoiau nici nu-și schimbau forma și mărimea. De aceea, fără să le mai amintească, el făcea aceste presupuneri și își baza pe ele raționamentul. Nerespectînd aceste amănunte importante sau dacă ar fi insistat asupra altora, fără importanță, ar fi putut ajunge la rezultate paradoxale.

— Îți mai aduci aminte cînd l-ai întrebat pe nepotul meu, Nucu, pe cînd era în clasele elementare, în cît timp ar ridica 120 de lucrători un zid pe care 2 lucrători îl fac într-o oră?

— Cum să nu! Mi-a răspuns: „Într-un minut“ și cînd i-am spus că a greșit ți-a cerut ajutorul; iar tu, în loc să-i explici că greșeala lui nu a fost de calcul și că raționamentul lui a fost lipsit de substratul experimental, ți-ai bătut joc de el!

— Am făcut-o anume, ca să-ți dau ție prilejul de a i te înfățișa ca geniul lui ocrotitor! Dealtfel, nici n-ai lăsat să-ți scape ocazia. Ca să dregi lucrurile, i-ai spus anecdota cu țăranul care a săpat o groapă și cînd a astupat-o a constatat că-i mai rămăsese pămînt pe dinafară. Nedumerit, a întrebat pe vecinul lui de ce s-a întîmplat așa, și acela i-a răspuns: „Fiindcă n-ai săpat groapa destul de adînc!“ Așa a fost, ori ba?

— Da! Pe atunci îl mai puteam păcăli sau uimi, astăzi m-ar putea el pune față-n față cu niște raționamente în care să nu pot vedea înlănțuirea justă a realităților experiențelor mintale.

— Nu ești departe de adevăr. Era să uit! Știi ce întrebare a venit să-mi pună pramatia de nepot cînd eram gata de plecare? Unchiule dragă, te rog să mă lămurești, a început el cu cea mai inocentă mutră din lume, cum se face că doi tați, avînd fiecare cîte un fiu, au plecat la București cu trenul, cumpărînd numai trei bilete?

— Și tu ce i-ai răspuns?

— Eu? L-am ocărît că se ține numai de șotii. Drept care a rîs și mi-a mai spus încă una, adăugînd: știu unchiule că-ți plac problemele și de aceea ți le-am pus. Dacă nu reușești să le dezlegi pînă la Cîmpulung, îl ai acolo pe bădița Solonar care ți le rezolvă cît ai clipi. Cred că n-ai să uiți să-i spui că nu l-am uitat? Și uite așa, am două probleme pe care n-am

reușit să le rezolv, dar dacă uitam de ele, mămucută, ce mă mai aștepta!

— Și care-i, mă rog, cealaltă problemă?

— Trei oameni se duc la un hotel și cer trei camere separate, dar nu găsesc decît o cameră cu trei paturi, iar băiatul ce i-a condus a spus că, după cîte știe el, costă 300 de lei pe noapte. Atunci cei trei călători au scos cîte o sută de lei și i-au dat. Băiatul a luat banii și cînd i-a dat la casă i s-a spus că prețul este 250 de lei și i-a dat 50 de lei ca să ducă înapoi. Cei trei oameni au luat fiecare cîte zece lei și i-au lăsat băiatului 20 de lei. Au făcut socoteala că au dat pe cameră 270 de lei. Însă 270, plus 20 cît a luat băiatul, fac 290 de lei. Unde-s 10 lei? Îți spun drept că nu am văzut unde-i greșeala: m-am gîndit un timp la ea, apoi mi-a fost lehamite și am lăsat-o. Cînd am venit aici, au fost atîtea de discutat că nu am mai avut cînd să mă gîndesc la ele. Dar acum le-a venit rîndul! Ei, bădie Solonar, arată-mi ce poți!

— După cum văd, s-a nimerit ca și problemele acestea să se lege de discuția noastră. Și aici intervine experiența, dar rămîne să vedem pe ce amănunt trebuie să punem accent și pe care să-l îndepărtăm. Experiența ne spune că doi tați cu doi fii fac 4 oameni și ne pare curios că, dacă-s cinstiți, au cumpărat numai 3 bilete, însă admitînd faptul ca atare, rezultă că ar trebui să căutăm alt amănunt pe care să-l cunoaștem dar să nu fi ținut seama de el. Care ar putea fi?

— E simplu, dar nu mi-a trecut prin minte: noțiunea de tată nu o exclude pe cea de fiu. Unul dintre tați poate fi totodată și fiul celuilalt tată. În acest caz sînt numai trei oameni: tatăl, fiul și nepotul!

— Ei! ai văzut? Hai să o lămurim și pe cealaltă. Și aici în raționament intervine un amănunt care nu are importanță dar este lăsat de o parte altul, care ar duce la rezolvarea problemei. E foarte adevărat că la început au plătit 300 de lei pe cameră, dar acest amănunt nu mai are nici o importanță din clipa cînd au pus, fiecare dintre ei, cîte 10 lei în buzunar. Din acel moment rezultă că ei au plătit numai 270 de lei pe cameră, care costă în realitate numai 250 de lei, iar la aceștia se adaugă cei 20 de lei dați băiatului

Acum, cînd ai să-l întîlnești pe Nucu să-ți iei revanșa, punîndu-i și tu o problemă de același gen. De pildă aceasta: Un tînăr a împlinit 21 de ani după ce și-a serbat a 5-a zi de naștere, fără să fi omis vreuna. Cum se explică?

— Cum? Habar n-am!

— Nu te grăbi, gîndește-te mai întîi, căci singur ai ales azi acest subiect de discuție. Nu găsești că s-ar putea stabili vreo legătură între numărul 5 și 21 sau, să zicem, 20?

— Ba da: $5 \times 4 = 20$. Asta înseamnă că el își serba ziua lui de naștere odată la 4 ani, adică în anii bisecți. Or, singura zi care caracterizează acești ani este 29 februarie.

— Ai văzut că ai avut habar! Să sperăm că Nucu nu are să sesizeze amănuntul, ca să-l poți prinde și tu în cursă! Dar nu garantez!

— Acum, dacă-i bal, bal să fie! Te-aș mai ruga să discutăm o problemă pe care, deși știu să o rezolv, nu-mi dau deloc seama unde-i chițibușul? E vorba despre moștenirea celor 17 cămile ce trebuiau împărțite între trei frați...

— Aha! Spune mai bine, despre testamentul arabului cel hîtru. El lăsase cu limbă de moarte ca $1/2$ dintre ele să le ia fiul cel mai mare, $1/3$ din numărul cămilelor să rămîină feciorului mijlociu, iar $1/9$ mezinului.

— Da. Și neputînd împărți cămilele după voia tătînelui, feciorii le-au păstrat împreună pînă cînd a trecut pe acolo un înțelept și le-a auzit păsul. Cum era urcat și el pe o cămilă, a coborît, a lăsat cămila lui să se amestece cu celelalte și apoi a făcut împărțirea. Ție, i-a zis feciorului mai mare, ți se cuvine $1/2$ din numărul cămilelor, desparte-le în două și ia-ți partea ta. Nu-i venea să creadă feciorului că poate fi atîta bunătate într-un om, dar dacă i-a spus să facă așa, a ascultat și a socotit că i se cuvin 9 cămile. Tu ai dreptul la $1/3$ dintre ele, i-a spus celui de al doilea. Și acesta a încuviințat că i se cuvin 6 cămile. Iar ție, ca cel mai mic, ai numai $1/9$ din numărul cămilelor, adică 2 cămile. Hai, luați-vă fiecare cămilele voastre că s-a făcut tîrziu și eu am drum lung de mers. Zicînd acestea, s-a urcat pe cămila lui și s-a dus, lăsînd frații fericiți și totodată buimăciți de întîmplare. Buimăcit

am rămas și eu și numai la tine-mi este speranța să mă lămurești!

— Vezi că înțeleptul tău își merita numele fiindcă el, după ce a auzit problema, a căutat să verifice datele și să vadă dacă ea a fost pusă corect sau nu. Așadar a adunat $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ și atunci a aflat că suma acestor fracții nu face un întreg, ci numai $\frac{17}{18}$. Lipsea deci, pînă la un întreg,

$\frac{1}{18}$, cu alte cuvinte tocmai cămila lui, a 18-a. Așadar, și-a spus în sinea lui înțeleptul, dacă ar fi fost 18 cămile, făcînd împărțirea așa cum o cerea testamentul, o cămilă iese afară din împărțea, fiindcă $9 + 6 + 2 = 17$. Cunosînd acest lucru, a lăsat fără grijă cămila lui să se amestece cu celelalte, fiind sigur că după împărțire o va putea lua înapoi.

— Atunci de ce a făcut arabul testamentul în această formă?

— De, asta-i mai greu de ghicit, poate că voia ca în felul acesta să-i oblige pe feciorii lui să rămînă împreună, sau poate se gîndea că între timp una dintre cămile ar putea avea un pui... Acum că m-ai stîrnit, am de gînd să-ți mai spun una, pe care nu cred că o cunoști. Ascultă: Două femei s-au dus la tîrg, fiecare avînd de vînzare cîte 60 de mere. Prima a vîndut cîte trei mere la 2 lei și a încasat 40 de lei, a doua le-a dat cîte 5 mere la 2 lei și a luat pe ele 24 de lei. A doua zi, cea care dăduse 5 mere la 2 lei a zis către cealaltă: Ia și merele mele și vinde-mi-le tot așa, că eu aș spăla rufe. Vecina ei s-a învoit să o ajute și cînd a ajuns în piață s-a gîndit așa: dacă eu am dat 3 mere la 2 lei și ea a dat 5 mere la 2 lei, am să le pun la un loc și am să le vînd cîte 8 mere de 4 lei, adică 2 mere de 1 leu. Nici nu mă încure și nici nu-mi pierd timpul vînzînd întîi pe ale mele și apoi pe ale ei. Zis și făcut. A vîndut merele, a încasat banii și cînd a ajuns acasă a chemat vecina să-i dea partea ei. Dar cînd numără banii, vede că are numai 60 de lei și nu 64 cît au avut ieri împreună. Întîi s-au certat, pe urmă au făcut socoteala și au înțeles că dacă se dau 2 mere de 1 leu, nu pot primi decît

60 de lei. Atunci unde-s cei 4 lei care lipsesc? se întrebau ele, fără să poată răspunde! Spune tu!

— Să fac și eu ca arabul cel înțelept, adică să analizez problema în mod logic și nu intuitiv. Dacă în prima zi s-au încasat 64 de lei, înseamnă că, puse la un loc, de un leu se cuvin: $120 : 60 = \frac{15}{8}$ mere și nu 2 mere așa cum a socotit femeia.

La fiecare două mere se pierdea deci câte $\frac{1}{8}$ dintr-un măr așa că, la fiecare leu, se pierdea câte $\frac{1}{16}$ dintr-un leu, iar în total la 64 lei s-au pierdut $64 \cdot \frac{1}{16} = 4$ lei. Așa-i?

— Așa-i! Spre deosebire de mata, femeia a judecat bazându-se pe numărul de mere ce avea să-l vîndă și nu pe costul mediu al lor, care nu mai era același într-un caz sau altul.

— Mare pacoste și cu gîndirea asta! Începi prin a judeca bine și deodată, cînd nici nu te aștepți, o rotiță s-a răsucit oleacă prea tare și gata! raționamentul te-a înșelat. Cum? Cînd? Unde s-a strecurat greșeala, habar n-ai. Stai pe loc, îți bați capul, o cauți, uneori o găsești dar și de cîte ori nu o vezi? Și dacă ar fi să i se întîmple numai unui pîrlit ca mine, nu ți-ar fi nimica, dar asta se întîmplă chiar celor mai talentați matematicieni, cu o putere de creație ieșită din comun! Ieri ne-ai povestit cazul lui Frege. Tocmai unuia dintre cei mai versați logicieni i s-a strecurat o greșeală fundamentală de raționament!

— Întîmplarea aceasta l-a făcut pe un *hîtru bun de glume* să afirme că: „logica este arta de a merge strîmb, cu siguranță“, iar alt matematician, mai grav, era de părere că „nu mai putem spera să fim logici; cel mai bun lucru ce-l putem spera este să nu fim nelogici“.

— De fapt, dacă stai și te gîndești, logica studiază numai *forma* gîndirii nu și *conținutul* ei, ea controlează numai dacă legile gîndirii au fost aplicate corect. Ea nu garantează adevărul cunoștințelor raționamentelor, ci numai dacă ele au fost formulate corect sau nu.

— Tocmai aceste două cuvintele: *sau* și *nu* au un rol covârșitor în procesul deducerilor logice. Dacă, avînd în fața mea o figură, spun: „această figură este un cerc *sau* o elipsă“, și apoi adaug: „această figură *nu* este o elipsă“, rezultă, în mod cert, că: „această figură este un cerc“.

— Exemplul tău a venit la țanc, ca să-mi concretizeze ideea ce doream să ți-o înfățișez. În realitate nu există decît *cercul* în fața ta. Presupunînd că figura ar putea fi cerc sau elipsă, dar precizînd că nu-i elipsă, tu ai afirmat, în mod implicit, că figura *este un cerc*. Cu alte cuvinte, raționamentul tău care nu a stabilit nimic cu privire la proprietățile acestor două figuri, ci a *precizat* doar numele *figurii* pe care o aveai înaintea ta, este o simplă *tautologie*. Desigur că, așa fiind, concluzia ta este adevărată — orice enunț tautologic este adevărat — spre deosebire de un enunț stabilit în mod empiric, care ar putea fi dezmințit.

— Există ceva în considerațiile tale peste care cred că ai trecut ușor. De aceea, te rog să reluăm analiza desfășurării procesului logic ce m-a condus la concluzia mea. Cînd am privit figura din fața mea, eu nu eram deloc convins că am de-a face cu un cerc, de aceea am și folosit în prima premisă pe *sau*. Figura putea fi cerc *sau* elipsă! Abia după ce am formulat această ipoteză, mi-a venit în minte să verific, ținînd seamă de cunoștințele ce le am asupra elipsei, dacă figura poate fi o elipsă și astfel am constatat că ea nu poate fi o elipsă. Așadar, abia atunci și în acest mod, am realizat, în mod conștient și sigur, că figura din fața mea este un cerc! Desigur că, dacă mintea mea nu ar fi fost *limitată*, dacă aș fi fost *atotștiutor*, atunci nu ar mai fi fost nevoie de aceste etape intermediare ale raționamentului logic și aș fi cunoscut dintr-o dată adevărul.

— De acord, totuși nu ai negat că raționamentul tău este o tautologie, ci numai l-ai explicat!

— Da!

— Atunci, am să merg mai departe și am să te întreb: nu s-ar putea oare ca întreaga matematică, fiindcă se bazează pe raționamentul logic, să fie o simplă tautologie? Spun oare ceva nou dacă în loc de $4 + 5$ vorbesc despre 9 sau

cînd scriu $4 \times 5 = 20$? Prin 9 sau prin 20 înțeleg același lucru ca și prin $4 + 5$ sau prin 4×5 ; ultimele fiind expresii noi obținute printr-o serie de tautologii, din primele, tautologii pe care le numesc calcule și care au avantajul de a-mi arăta dintr-o dată ceea ce altfel mi-ar fi fost, uneori, chiar imposibil de stabilit, cum ar fi cazul dacă rămîn în domeniul numerelor, să decid dacă-i tot una $2^{16} + 1$ sau 65 537.

— Vezi, aici lucrurile se complică și la întrebarea ta nu ți-ar putea răspunde, în mod absolut, nici un matematician-filozof contemporan, fiindcă el face cu siguranță parte din una dintre marile grupări importante — dacă nu din altele mai mici — cunoscute sub numele de *logicism*, *formalism* sau *intuiționism*. Logiciștii ți-ar aduce argumente și ar căuta să te convingă că ai dreptate, că întreaga matematică este o tautologie, dar nu și ceilalți! Cel dintîi care s-a opus acestei păreri, cu vehemență, a fost Poincaré. Iată cum începe el primul articol, intitulat „Asupra naturii raționamentului matematic” din *Știință și ipoteză*: „Posibilitatea însăși a științei matematice pare o contradicție insolubilă. Dacă această știință nu-i deductivă decît în aparență, de unde-i vine această rigoare perfectă de care nimeni nu se îndoiește? Și dacă, din contra, toate propozițiile pe care le enunță se pot deduce unele din altele prin regulile logicii formale, cum de nu se reduce matematica la o imensă tautologie? Silogismul nu ne poate învăța nimic esențial-nou și dacă totul decurge din principiul identității ar trebui ca totul să se poată reduce la el. Vom admite deci că enunțurile tuturor acelor teoreme care umplu atîtea volume, nu-s altceva decît diferite moduri de a spune că A este A ?”

— După cîte văd, și Poincaré subliniază faptul că silogismul nu poate adăuga nimic nou datelor ce i se aduc.

— Da, însă el face un pas mai departe spunînd și întrebînd: „dacă deschidem o carte oarecare de matematică, la fiecare pagină autorul va enunța intenția de a generaliza o propoziție cunoscută de mai înainte. Dacă metoda matematică procedează de la particular la general cum poate fi numită deductivă?” Poincaré răspunde că există o deosebire pro-

fundă între raționamentul matematic și cel analitic sau cel intuitiv pur, deosebire care se remarcă prin faptul că „raționamentul matematic are în el însuși un fel de virtute creatoare”. Dealtfel și Descartes a avut de spus ceva contra silogismului, așa cum se prezintă el în *Elementele* lui Euclid. El arată că silogismul, pornind de la premise universale, ajunge la concluzii universale, pe când în raționamentul matematic intervine și o fază *intermediară, de contemplare a obiectului individual*, când se face apel la *intuiție*. Or, dacă raționamentul matematic se referă la un obiect concret, care se prezintă intuiției, nu mai există nici o garanție că raționamentul a fost făcut asupra unui obiect oarecare și deci nici o justificare a generalizării cu care se termină o demonstrație! Problema a fost discutată foarte îndelung în secolele XVII și XVIII.

— Nu cumva aceasta-i faimoasa problemă, cunoscută sub numele Locke-Berkeley?

— Ba da. Concepția aceasta intuiționistă se află azi la baza școlii cu acest nume, condusă de olandezul L. Brouwer, care se opune formalismului lui Hilbert, despre care am discutat noi ieri.

— Oare nu ar fi acesta un motiv ca să întrerupem un pic discuția noastră și să-mi spui, în câteva cuvinte, care-i punctul de vedere intuiționist?

— La grele încercări mă mai pui, să vedem ce voi reuși să fac! Mai întâi, dacă începem cu Brouwer și nu cu Kronecker, care a făcut primul pas în această direcție, atunci când s-a opus tendinței — azi unanim acceptată — de a privi teoria mulțimilor ca pe o ramură a matematicilor sau de a considera numerele iraționale pe aceeași treaptă cu numerele întregi, înseamnă că vom vorbi despre neointuiționism. Kronecker este primul care a susținut, certându-se cu mulți dintre contemporanii săi din a doua jumătate a secolului al XIX-lea, că toate rezultatele cercetărilor matematice trebuie să se poată exprima *intuitiv* prin formele simple ale proprietăților numerelor întregi. Brouwer și școala sa a reluat aceste păreri în prima jumătate a secolului nostru și le-a dus mai departe, susținând că fiecare propoziție mate-

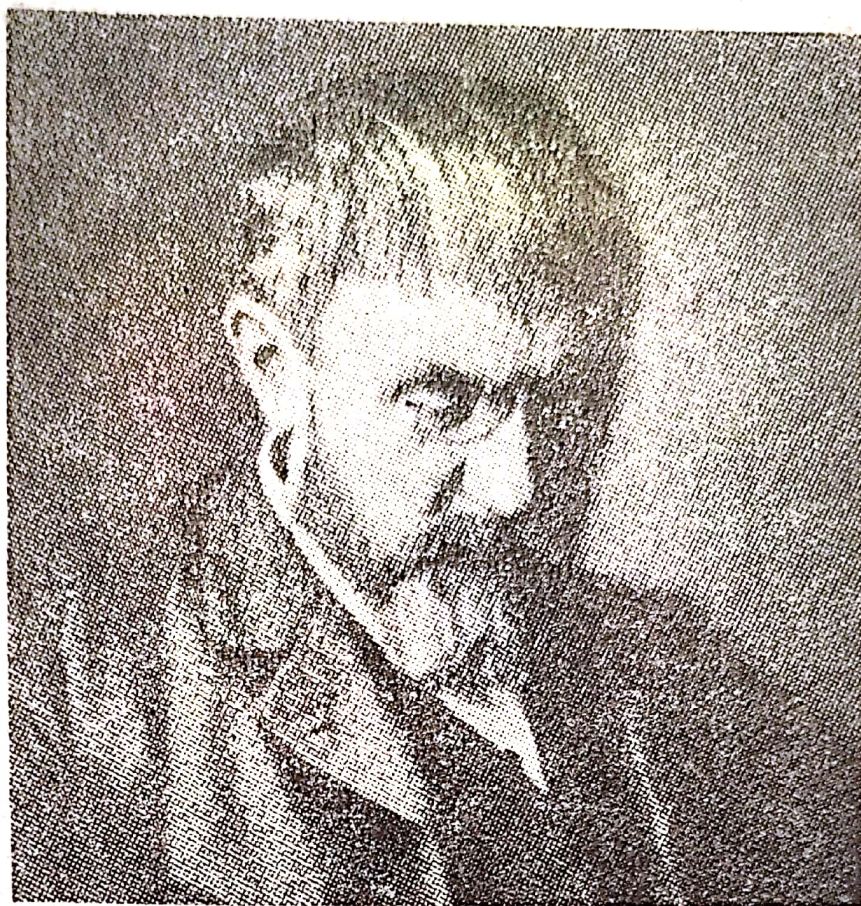
matică adevărată trebuie justificată printr-o construcție care să fie o *experiență evidentă*, dar nu în lumea fizică, așa cum pretind formalistii, ci o *experiență mentală, sintetică și apriori*. Neintuiționistii consideră că logica este o parte a matematicii dar nu și invers, matematica fiind independentă de logică și chiar de limbaj. Singura sursă a cunoștințelor matematice fiind *intuiția*, ea singură este în stare să ne facă să recunoaștem anumite concepte precum și concluziile lor, ca evidente și clare.

— Mi se pare că și Poincaré a exprimat asemenea idei în articolul „Creația matematică” pe care l-am citit eu, de când sînt aici, în cartea ce mi-ai dat-o: *Știință și metodă*. Dacă vrei aș putea să-ți citez cîteva fragmente.

— Cu plăcere, numai că țin să-ți atrag atenția că Poincaré nu-i socotit, și nici el nu s-a socotit, a fi ceea ce se numește „un intuiționist”.

— Asta nu are nici o importanță, sînt probleme mai largi care m-ar depăși și de aceea nici nu-ți cer să intri în amănunte. Însă m-a izbit asemănarea. Ascultă aici: „Geneza creației matematice este o problemă care ar trebui să-i intereseze pe psihologi. Este actul prin care spiritul omenesc pare să împrumute cel mai puțin din lumea exterioară, în care el nu acționează sau nu pare să acționeze decît prin el însuși, așa fel că cercetînd procesul gîndirii geometrice, putem spera să atingem ceea ce-i mai esențial în spiritul uman... O demonstrație matematică nu-i o simplă alăturare de silogisme, sînt silogisme așezate într-o anumită ordine și ordinea în care aceste elemente sînt așezate este cu mult mai importantă decît elementele înseși. Dacă am sentimentul, intuiția acestei ordini, astfel ca să observ dintr-o dată raționamentul în întregime lui, nu am a mă teme că aș uita vreunul dintre aceste elemente, fiecare dintre ele va veni să se așeze de la sine în cadrul care-i este destinat, fără ca eu să mai fac vreun efort de memorie.” Iar mai departe accentuează această idee: „Se înțelege că acest sentiment, această intuiție a ordinii matematice, care ne face să ghicim armonii și relații nebănuite, nu poate aparține tuturor. Unii, care nu posedă nici acest sentiment delicat și greu de definit și nici o putere a memo-

II. POINCARÉ



riei și atenției mai mare decât cea obișnuită, nu vor fi în stare să înțeleagă matematicile superioare... Alții, neavînd acest sentiment decât într-o slabă măsură, dar fiind dotați cu o memorie puțin obișnuită și cu o mare capacitate de atenție, vor învăța pe de rost detaliile, unele după altele, și vor putea înțelege matematicile, ba chiar să le aplice, dar nu le vor putea crea. Alții, în fine, care posedă intuiția specială despre care am vorbit, într-un grad mai mult sau mai puțin dezvoltat, nu numai că vor putea să înțeleagă matematicile, chiar dacă memoria lor nu ar avea nimic deosebit, dar vor putea deveni creatori și vor căuta să inventeze, cu un succes mai mare sau mai mic, după cum această intuiție le este mai mult sau mai puțin dezvoltată". Cu aceasta am terminat, deși articolul întreg este foarte interesant prin aceea că descrie exact procesele ce se întîlnesc azi în mașinile electronice de calcul, cu atîta vreme înainte de a fi fost ele inventate, procese pe care el le localizează în subconștientul uman!

— Atunci poate că ar fi timpul să ne întoarcem la problema pe care am lăsat-o în voia valurilor!

— Adică tot la Poincaré, însă reluând articolul asupra naturii raționamentului. Urma să vedem, cum se manifestă acea însușire creatoare a raționamentului matematic care-l deosebește de silogism?

— Întocmai. Și dacă examinăm această lucrare asupra naturii raționamentului matematic, vom întâlni ceea ce ne interesează în prezența *raționamentului prin recurență*, raționament pe care Poincaré îl consideră ca fiind propriu matematicii. Ca să ne lămurim, să urmărim *definiția adunării* $x + a$, anume operația care constă în a adăuga un număr a , numărului x dat. Poincaré consideră că s-a definit într-un fel oarecare operația $x + 1$ și că știm ce înseamnă $x + (a - 1)$. De aici rezultă că:

$$(1) \quad x + a = [x + (a - 1) + 1].$$

Așadar, definim prin *recurență* operațiile $x + 2, x + 3, \dots$ pînă ce ajungem la $x + a$, de îndată ce am știut să-l definim pe $x + 1$. „Această definiție merită un moment de atenție”, spune Poincaré, căci „ea este de o natură particulară care o deosebește de definiția pur logică; egalitatea (1) conține o infinitate de definiții distincte, fiecare dintre ele neavînd un sens decît după ce am cunoscut-o pe cea precedentă”.

— În adevăr! Dacă nu știu cît este $x + 3$ nu pot ști nimic despre $x + 4$! Asta-i clar. În acest proces, dealtfel, constă și procedeul *demonstrației prin recurență* pe care-l cunosc de cînd eram la școală: se stabilește că o teoremă este adevărată pentru $n = 1$, se presupune că este adevărată pentru $n - 1$ și în această ipoteză se dovedește, prin calcul, că este adevărată pentru n , iar de aici rezultă că formula este adevărată pentru toate numerele întregi.

— Mă bucură că ți-ai amintit aceste elemente din aritmetică, fiindcă astfel vom putea urmări ideea lui Poincaré: „Caracterul esențial al raționamentului prin recurență este că el conține, condensat într-o formă unică, o infinitate de silogisme”.

— Exact. Dacă pornesc de la faptul că teorema este adevărată pentru numărul 1, atunci afirm că *dacă ea este adevărată pentru numărul 1, ea este adevărată pentru numărul 2*, de unde trag concluzia că *teorema este adevărată pentru 2*. Abia acum trec la al doilea silogism, construit la fel ca primul, de unde voi trage concluzia că teorema este adevărată pentru numărul 3 ș.a.m.d.

— Poincaré formulează aceasta într-un mod foarte elegant: „Premisa majoră a tuturor silogismelor poate fi adusă la o formă unică. Dacă teorema este adevărată pentru $n - 1$ ea este adevărată și pentru n . Vedem deci că, în raționamentele prin recurență, se enunță premisa minoră a primului silogism și formula generală care conține, drept cazuri particulare, toate majorele. Acest șir de silogisme, care nu s-ar sfârși niciodată, se găsește redus la o frază de câteva linii“. Astfel, el arată deosebirea care există între *posibilitatea nelimitată* de care dispune acest raționament prin recurență față de resursele logicii formale, care *este obligată* să rămână numai în limitele finitului: „ca să ajungi la cea mai elementară teoremă, nu te poți lipsi de ajutorul raționamentului prin recurență, pentru că el este un instrument care permite să treci de la finit la infinit“.

— Spune-mi, te rog, care-i natura inducției matematice? Folosesc această denumire, fiindcă știu că-i sinonimă cu raționamentul prin recurență.

— După câte cunosc eu, deși *principiul inducției matematice* este cel mai caracteristic dintre principiile aritmeticii, cei ce se ocupă cu cercetările despre fundamentele acestei științe nu au ajuns încă la un rezultat unic. Logiciștii, de pildă, susțin că el ar putea fi derivat din axiomele logicii, Peano l-a considerat ca pe una dintre axiomele aritmeticii, Hilbert afirma că nici nu-i un principiu independent, ci numai o consecință care se poate deduce din construcția concretă a numerelor. Poincaré s-a opus acestor aserțiuni și a susținut că inducția matematică este tipul raționamentului sintetic, apriori, că este „afirmația puterii gândirii care se știe capabilă de a concepe repetiția nedefinită a aceluiași act, de îndată ce acel act a fost odată posibil“. Dealtfel, el a accentuat

și deosebirea dintre inducția matematică completă și inducția incompletă: „Dar, s-ar putea obiecta că dacă experiența singură nu poate legitima raționamentul prin recurență, ar putea-o face experiența ajutată de inducție. ...Inducția matematică, adică demonstrația prin recurență, se impune în mod necesar, pentru că ea nu-i decît o afirmație a unei proprietăți a gândirii însăși”.

— Oare cînd s-a introdus inducția în matematică sau, mai bine zis, în aritmetică?

— În Europa de apus, e aproape sigur că a fost introdusă în secolul al XVI-lea de către Francesco Maurolico, unul dintre cei mai reputați savanți de atunci. Era sicilian de origine și a scris sau a tradus multe cărți de matematică, fizică etc. Printre acestea a scris și două volume de aritmetică, în care folosește sistematic literele în locul numerelor, iar în prefața acestei lucrări, terminată în anul 1557, dar publicată la Veneția în anul 1575, el arată că un raționament stabilit pentru un număr N poate fi aplicat și la numărul $N + 1$. Peste aproape 100 de ani, problema a fost reluată de către Pascal, în lucrarea sa asupra triunghiului aritmetic, scrisă în anul 1654 și apărută în anul 1665. El stabilește aici, folosind metoda inducției complete, formula care exprimă termenul general din linia n și coloana m a triunghiului. Cam tot pe atunci, metoda inducției este folosită și de Wallis în *Arithmetica infinitorum* (1656).

— Știu că Fermat avea ce avea cu Wallis. Dacă spui că el a aplicat metoda inducției — deduc de aici că era vorba de inducție incompletă — oare Fermat n-a găsit nimic de obiectat?

— Ți-ai găsit să-l ierte! Am notat cîteva rînduri din observațiile scrise de el, fiindcă ele amintesc de stilul argumentelor lui Poincaré: „Numitul domn Wallis, propune o serie de mărimi începînd cu zero, care se succed în progresie aritmetică... Această metodă ar putea fi folosită... dacă ne-am putea asigura cu aproximație de adevărul ei... căci, altfel, s-ar putea adopta cutare regulă care este bună în multe cazuri particulare, dar care este falsă și lipsită de un caracter universal”. Dealtfel și Newton vorbește în același mod



despre metoda inducției. El arată că propozițiile deduse prin inducție, din fenomene, pot fi oricând revizuite de alte experiențe noi, dar nu și în baza unor ipoteze contrare. Din secolul al XVII-lea, metoda inducției matematice intră în uzul curent, mai ales după apariția lucrărilor lui Jacob Bernoulli I, asta înseamnă după 1686.

— Așadar, Maurolico ar putea fi considerat și ca descoperitorul acestui principiu.

— Asta nu ți-aș putea-o garanta. Unii susțin aceasta, alții afirmă că el ar fi fost descoperit de Arhimede. N-ar fi exclus nici asta, dacă ne gândim la aria parabolei, la determinarea numărului π , adică la probleme în care intervine trecerea de la un număr finit, la un număr infinit. Însă, de pildă, Léon Brunschvieg era de părere că principiul inducției complete nu a putut fi cunoscut de către matematicienii din antichitate, sau cel puțin nu s-a făcut mult caz de el, fiindcă „prin propria ei natură, logica lor tindea să nu con-

sidere decît regulile relative la clase determinate de obiecte în număr finit”.

— Toate regulile au excepții.

— Stai bădiță, nu te exprima mata în sentințe, și încă paradoxale!

— Asta-i bună! Dacă și în acest adevăr banal găsești tu un paradox, atunci dă-mi voie să cred că ar trebui să întrerupem discuțiile noastre ca să ascultăm niște muzică. Poate că te-au surmenat aceste neîntrerupte discuții despre logică, sau în legătură cu logica!

— Nu, că-s deprins să gîndesc! Așa că, dă-mi voie să-ți arăt că spusa ta nu-i nici un adevăr banal, nici o minciună crasă, ci pur și simplu un *pa-ra-dox*, așa cum ai auzit! Dacă ai spus că „toate regulile au excepții”, și *te cred*, atunci rezultă că, propoziția pe care ai enunțat-o tu *nu-i adevărată* căci fiind și ea o regulă, are o excepție, adică „există o regulă care nu are excepție”. Dacă, din contra, *nu cred* că cele ce ai spus tu reprezintă un adevăr și susțin eu că există reguli care nu au excepții, prin această propoziție rezultă că tu ai spus un adevăr fiindcă am găsit un exemplu de o regulă, care face excepție de la regula ta, adică o regulă care nu face excepție! Ei ce zici? Să punem niște muzică? Ce ai vrea să ascuți? Unul dintre concertele Brandenburgice sau poate sonatele 2 și 3 pentru violoncel și pian ale lui Beethoven, care-mi sînt nespuse de dragi?

— Să mă lași în pace! Oricum aș fi crezut, dar că această propoziție pe care am auzit-o și am repetat-o de nenumărate ori este un paradox, asta n-aș fi crezut-o în ruptul capului!

— Ei, ce să-i faci, se mai întîmplă și surprize de acestea, mai ales după ce te încumeți să discuți atîtea probleme de logică! Ca să-ți treacă necazul, nu-i decît un leac: mă duc să-l pregătesc! Pînă atunci tu mai adu-ți aminte de problema aceea cu mulțimea tuturor mulțimilor care este inclusă ca o parte a ei, cum a fost cazul și aici, unde fiind vorba despre o regulă care se cuprinde în mulțimea tuturor regulilor relativ la regulile ce se referă la anumite obiecte. Această regulă nu se mai referă la obiecte, ci chiar la regulile despre obiecte.

— În timp ce făceam cafeaua, mi-a spus Teodor Solonar, pe cînd puneam ceștile pe masă, mi-a venit în minte paradoxul lui Protagoras. Ți-aduci aminte de el? Trebuie să fi avut o minte extraordinară de ascuțită.

— Cum să nu! Doar el a spus că „omul este măsura tuturor lucrurilor, a celor ce sînt, în ce fel sînt și a celor ce nu sînt, în ce fel nu sînt”. Însă, în ceea ce privește ascuțimea minții lui, cred că elevul care i-a tras chiulul cu plata lecțiilor, trebuie să-l fi întrecut! De fapt, ia să vedem: acel elev care a luat lecții de la Protagoras, i-a promis că-i va plăti atunci cînd va câștiga primul proces, fiindcă era doritor să se inițieze în învățătura sofistilor, dar era sărac. Crezi oare că de la început era hotărît să-și calce angajamentul?

— Da, așa cred, va fi avut el o poliță de plătit sofistilor care nu blamau nici un procedeu ce convenea unei cauze susținute de ei. Poate că la început nu avea încă argumentele, dar a avut timp să le învețe. Oricum, după ce Protagoras a așteptat el plata cît a așteptat, l-a întîlnit pe fostul lui elev și l-a anunțat că s-a hotărît să-l dea în judecată. La judecată voi câștiga cu siguranță, a adăugat Protagoras, fiindcă dacă voi câștiga procesul, îmi vei plăti ca urmare a hotărîrii judecătorești, iar dacă-l voi pierde, îmi vei plăti căci așa am convenit, ca să-mi plătești la primul proces pe care îl vei câștiga. Ba nu, i-a răspuns elevul, dacă voi câștiga procesul, nu pot să-ți plătesc, fiindcă ar fi contrar sentinței tribunalului, iar dacă îl voi pierde, atunci nu am să-ți plătesc fiindcă așa ne-a fost convenția! Și în acest paradox se repetă, văd, povestea de mai înainte; procesul pe care elevul trebuia să-l pledeze în fața tribunalului făcea parte din mulțimea proceselor care-l cuprindea ca element, fiind un proces relativ la mulțimea proceselor ce urmau să fie câștigate de el.

— Cum văd eu, dragă Toa, am făcut ce-am făcut și iar ne-am întors la logică! Avea dreptate cine a zis că, logica-i invincibilă pentru că nu poți combate logica decît tot prin logică!

— Ba eu am să ți-o întorc, citîndu-l pe academicianul Stoilov: „Nu matematica urmează logica formală, ci, dim-



C. HERMITE

potrivă, nevoile raționamentului matematic în contact cu realitatea, transformă logica, o adaptează acestei realități, și procesul istoric al dezvoltării matematicii confirmă astfel originea materială a însăși gândirii noastre logice. Așa că, dacă tragem linia și facem socoteala celor ce am discutat pînă acum, trebuie să admitem că matematica ajunge la adevărurile sale, adică la teoremele sau rezultatele sale noi, prin *intuiție* și *inducție* dar, ca aceste rezultate să capete pecetea certitudinii, adică rigurozitate, ele trebuie supuse raționamentului deductiv. De altminteri, cred că nici nu s-ar putea să fie altfel, fiindcă omul prin natura lui este, unul o fire intuitivă, iar altul o fire analitică. Poincaré a afirmat ceva mai mult! „Te naști matematician și nu devii și se pare că te naști geometru, adică intuitiv, sau analist, adică logician”. În volumul său intitulat *Valoarea științei* am citit un articol, „Intuiția și logica în matematică”, în care apăreau cîteva exemple tipice de matematicieni, unii intuitivi și alții analiști. Mi-aduc aminte de paralela pe care o făcea între doi dintre

foștii lui profesori, J. Bertrand și Ch. Hermite. „Bertrand”, spunea Poincaré, „era mereu în acțiune, gesticula, părînd că se încaieră cu un dușman închipuit sau că modelează o figură ce o avea nu în minte, ci în față, Hermite, din contra, era liniștit, iar ochii lui păreau că fug de lumea dinafară, căutînd înăuntru imaginea adevărului”. Sau de alta, dintre K. Weierstrass și B. Riemann; poți frunzări toate cărțile lui Weierstrass și n-ai să găsești o figură, fiindcă el reducea Analiza la un fel de prelungire a Aritmeticii. Riemann, din contra, folosea geometria exprimînd în imagini toate conceptele lui și nimeni nu le mai uita de îndată ce le-a prins sensul. Ca să-și susțină această părere, el își întoarce privirile chiar către antichitate și astfel îl pune pe Euclid printre logicieni, spre deosebire de aparența intuitivă a operei sale.

— Dar Poincaré, ce fel de spirit era? Vorbim de atîta vreme despre el, îi cunosc atîtea gînduri, portretul lui îl văd aici, alături de cel al lui Einstein și al altor zei, dar mai departe, nimic, gol. Ce fel de om a fost?

— Văzîndu-te cum sari de la una la alta, mă tem să nu cad și eu, odată cu tine, în mintea copiilor!

— Mă iartă, dar acestea nu-s copilării, *ci asociații de idei!* În loc să te temi — să știi de la mine că de ce te temi nu scapi — reține această *nouă noțiune* și, dacă vrei, notează termenul în unul dintre caietele tale!

— Bine, am luat notă. Mai întîi am să-ți spun că era foarte distrat așa că, pe tema aceasta circulă nenumărate anecdote despre care însă nu am să-ți vorbesc. Aș vrea să încep, povestindu-ți întîlnirea dintre Poincaré și matematicianul englez James Joseph Sylvester, pe atunci profesor la Oxford. Poincaré avea 31 de ani și publicase numeroase lucrări care i-au atras admirația matematicienilor de pretutindeni. Sylvester avea 71 de ani, dar cum era o fire entuziastă și plină de pasiune, s-a decis să plece la Paris ca să-l cunoască și să stea de vorbă cu acest celebru matematician. Urcă omul trei etaje, pe o scară îngustă, emoționat și gîfîind pînă să ajungă la apartamentul lui Poincaré și cînd ajunge îi apare înaintea un tînar, blond și sfios. „În fața acestui puternic rezervor de forță intelectuală” își amintește Sylvester, „limba nu m-a

mai ascultat. Abia peste câteva minute, după ce l-am examinat și am absorbit în mine trăsăturile tânărului, limba mi s-a dezlegat și am fost în stare să-i vorbesc“.

— Îl înțeleg foarte bine pe Sylvester, fiindcă Poincaré a fost cu adevărat *un rezervor de forță intelectuală*.

— În biografia pe care a scris-o E.T. Bell, îl numește „ultimul savant universal“ și nu greșește, fiindcă pe lângă lucrările și tratatele lui de matematici, fizică teoretică, fizică matematică și astronomie, avea un adevărat talent literar, care făcea ca lucrările lui să fie clare și ușor de înțeles. Opera lui filozofică și mai ales aceea de popularizare a științelor, deși era făcută la un nivel ridicat, adică fără să fie făcută vreo concesie rigurozității științifice, era citită cu interes și a fost tradusă în multe limbi. Ca o curiozitate am să adaug că nici înfățișarea lui, era și miop pe lângă că avea o anumită stângăcie în mișcări, dar nici testele psihometrice pe care i le-a făcut Binet, în epoca în care era celebru, nu trădau deloc minunea ce se ascundea în el. Avea o memorie fantastică, mai ales auditivă. Fiind miop, în tot timpul cât a fost elev sau student, nevăzînd la tablă, nu lua note în scris, ci asculta și înregistra totul în memorie. De la 15 ani, de cînd a căpătat pasiunea pentru matematică, a început să rezolve problemele ce-l preocupau tot în acest mod, adică mental, fără să scrie ceva, pînă cînd soluția era perfect definitivată. Nu-l deranja zgomotul sau conversațiile din jurul lui și își scria lucrările dintr-o dată, fără să mai revină, fără ștersături și, de cele mai multe ori, fără să le mai recitească! Cînd i se punea vreo problemă, răspunsul venea dintr-o dată, ca o săgeată, făcînd impresia că nici n-a avut timp să gîndească. N-avea deloc talent la desen și era să cadă la examenul de intrare în școala Politehnică, fiindcă obținuse nota zero la desen. Dar după ce a răspuns la celelalte materii, comisia a hotărît că trebuie să acorde nota 1 la desen, fiindcă un asemenea element excepțional merita și o asemenea excepție. Cariera și-a început-o ca inginer de mine, dar la 25 de ani, după ce a trecut examenul de doctorat, a fost oprit în învățămîntul superior. A lucrat continuu, timp de 34 de ani, publicînd vreo 500 de lucrări și vreo 30 de volume, în afară



de lucrările de filozofie și de popularizare. A murit în luna iulie 1912, în urma unei embolii, la o săptămână după o operație care reușise!

Poincaré era un intuitiv, el vedea soluțiile problemelor cele mai noi, mai grele sau mai încurcate, dintr-o străfulgerare. Marele matematician G. Darboux, fostul lui profesor, adaugă la acestea că, de îndată ce stabilea rezultatul, nu mai revenea asupra problemei, lăsând altora să tragă toate consecințele ce decurgeau din soluția stabilită de el. Aceasta-mi amintește de o observație a lui Poincaré în legătură cu analiza, din care, desigur, nu lipsește nici acel grăunte de sarcasm care-i caracterizează scrierile lui literare. Ca exemplu de spirit analitic el citează pe un binecunoscut matematician, în felul acesta: „Dl. Méray vrea să demonstreze că o ecuație binomă are întotdeauna o rădăcină, ceea ce se traduce în termeni comuni că un unghi poate fi împărțit. Dacă este vreun adevăr despre care credem că-l cunoaștem prin intuiție directă, atunci e tocmai acesta. Cine se va îndoi că un unghi poate fi

împărțit întotdeauna într-un număr oarecare de părți egale? Dl. Méray nu gîndește așa: în ochii lui, această propoziție nu-i deloc evidentă și ca să o demonstreze îi trebuie mai multe pagini." Poincaré era un intuitiv și el discută pe larg această problemă în articolul despre creația matematică. Dar țin să pecizez că deși, după cum ai să și vezi, el insistă asupra intuiției ca un fapt în sine, el nu era, ceea ce se numește *un intuitionist* și nu a făcut nimic prin care să se evidențieze preocupările lui în această direcție. El povestește, de pildă, diverse întâmplări legate în mod evident de modul cum a ajuns pe calea intuiției la soluțiile unora dintre cele mai speciale probleme de care s-a ocupat. De pildă, spune că odată, timp de două săptămîni, s-a chinuit zi de zi, stînd cîte o oră sau două la masa lui de lucru și gîndind la diferite metode ce l-ar putea duce să dezlege o anume problemă, dar nu a putut ajunge la vreun rezultat. Într-o seară însă, contrar obiceiului său, a băut o cafea, nu a putut dormi și dintr-o dată a simțit cum îi veneau ideile și se îngrămădeau unele peste altele, ciocnindu-se între ele, pînă ce s-au ales două care i s-au părut a fi cele necesare. Dimineața, soluția era bine precizată și după aceea, în cîteva ore, a așternut problema pe hîrtie, în forma definitivă. Apoi, după ce a obținut acest rezultat a înțeles că l-ar putea generaliza, însă a trebuit să întrerupă cercetările, fiindcă avea să plece într-o excursie. Pe drum nu s-a mai gîndit la problema lui. Ajunși în localitatea respectivă, în programul excursiei era prevăzută și o plimbare cu un omnibus cu cai. Or, exact în clipa cînd a pus piciorul pe scara omnibusului, ca să se urce în el, i-a trecut prin minte, într-o străfulgerare, nu numai modul de generalizare a problemei *la care nu se mai gîndise deloc* dar și posibilitatea de a stabili o legătură între ea și o altă problemă, dintr-un domeniu cu totul deosebit, cu care nimeni nu bănuia că ar putea avea vreo contingentă. În timpul excursiei nu a putut cugeta la aceasta și de-abia după ce a ajuns din nou acasă a constatat că totul era exact așa după cum a intuit în clipa cînd a pus piciorul pe scara omnibusului. Poincaré arată că aceste exemple nu reprezintă pentru el cazuri izolate, ci ele formează regula generală, soluțiile îi veneau întotdeauna cînd

nici nu se aștepta și nu atunci când se frământa ca să le găsească.

— Analizează el mai îndeaproape această inspirație, îi dă vreo explicație?

— Desigur, mai întâi el observă că acest ajutor al inconștientului, această inspirație, această intuiție a adevărului pe care-l caută, nu apare decît în urma unui *efort conștient*. El consideră că acest efort conștient este în stare să *mobilizeze anumiți atomi din creier* care se agită, se ciocnesc între ei, se combină în timpul când nouă ni se pare că sîntem în repaus și atunci când munca inconștientului este terminată, reușind să stabilească acea combinație care se cere, apare inspirația ca o străfulgerare. Asta-i și-i gata!

— Ba nu-i gata deloc, dragul meu Todirel! În discuția de acum ai pronunțat de vreo două ori cuvîntul *adevăr matematic* și m-am gîndit că nu putem trece peste acest lucru așa de ușor. De data aceasta nici nu mă poți acuza că sar de la una la alta, fiindcă este în directă legătură cu însăși problema gîndirii matematice.

— Nu, nu te mai acuz de nimic, sînt doar mut de admirație față de agerimea cu care țintești în asociațiile de idei! Și mă mai mir că, știind tot așa de bine ca mine că filozofii și matematicienii se străduiesc de mii de ani să răspundă la întrebarea: „Care-i adevărul?“, sperî să-l fi găsit eu, acum, anume pentru tine!

— Lasă, nu te mai ascunde după deget, știi bine că nu am această pretenție. Eu aș porni de la Marx, care era de părere că „omul trebuie să facă dovada adevărului, adică a realității și a forței, a caracterului netranscendental al gîndirii sale în activitatea practică“ și aș căuta să leg această idee de miezul celor mai abstracte teorii matematice și apoi să văd ce concluzii s-ar putea trage de aici. Dar mai întâi, ce este o propoziție adevărată? Pe ce cale se poate ajunge la ea?

— O propoziție adevărată este aceea care este în concordanță cu obiectul, experiența sau fenomenul la care se referă, dacă ea permite să se prevadă fenomenul la care se referă. Începînd cu Renașterea, se considera că se poate ajunge

la adevăr prin intuiție sau prin raționament. Axiomele din *Elementele* lui Euclid sînt adevăruri intuitive, evidente de la sine, pe cînd teoremele sînt adevăruri la fel de sigure, dar stabilite pe calea raționamentului. Descartes afirma că „numai matematicienii sînt singurii care au găsit cîteva demonstrații, adică anumite adevăruri sigure și evidente” sau că „nefiind decît un adevăr despre un lucru, acel ce-l găsește știe tot ce se poate ști despre el”. Pînă în secolul al XIX-lea, matematicienii erau convinși că geometria euclidiană este singura știință care deține adevărurile absolute asupra spațiului înconjurător, după cum numărul natural era noțiunea cea mai evident intuitivă și în afară de orice echivoc, pe care au fost clădite adevărurile absolute ale aritmeticii. Apariția geometriilor neeuclidiene, pe de o parte, dezvoltarea analizei și a teoriei funcțiilor cu descoperirea curbilor fără tangentă etc., pe de altă parte, au distrus dintr-o dată și mitul adevărului matematic absolut și încrederea în intuiția geometrică. Noțiunea de *adevăr matematic* devine relativă, prin *adevăr matematic* înțelegîndu-se rezultatul logic ce urmează din premise arbitrare, considerate ca axiome. În același timp, este pusă în discuție și noțiunea de număr întreg și, în străduința de a i se descoperi esența, se creează un nou domeniu de cercetare, logica matematică.

— S-a creat un domeniu de cercetare teoretică, dintre cele mai abstracte și, cînd nici nu te așteptai, el a găsit o fantastică aplicație practică, la mașinile electronice de calcul! Parcă nici nu-ți vine să crezi!

— De ce? Uiti că toate abstracțiile matematice, chiar și cele mai înalte din care au fost destrămate orice urme de intuiție, reflectă *anumite laturi* ale realității materiale, într-o *anumită formă* generală? Și atunci, nu-i firesc să i se deschidă, la un moment dat, cînd nici nu te aștepti, cum spui tu, calea către aplicația practică? Închipuie-ți o lunetă, îndreptată într-o anumită direcție. Ca să poată pătrunde în ea o rază de lumină reflectată, trebuie ca raza incidentă să întâlnească o suprafață lucie așezată într-un anumit loc și sub un anumit unghi, altfel razele trec pe lîngă tubul lunetei fără să pătrundă în el. Dar cuvintele mele nu-ți pot aduce decît o argumentare

naivă. Cu totul altfel vei privi lucrurile după ce îți voi citi câteva fraze scrise de profesorul Mircea Malița în unul din „eseurile rostite” al celui de al treilea volum cu titlul *Aurul cenușiu*: „Marx spunea că omenirea nu-și pune decât probleme pe care le poate rezolva. Generația contemporană folosește mașinile de calcul exact în momentul istoric în care numărul de factori ce se adresează judecății omenеști a ajuns de nestăpînit prin mintea goală și singură. Mașinile de calcul au fost inventate în momentul în care prin mijloacele obișnuite nu mai putem să enumerăm și să mînuim simultan totalitatea factorilor care intră în țesătura problemelor curente.” Iar dacă mai vrei și o motivare, tot el ne-o va da: „Timp de vreo două mii de ani, regulile gîndirii au fost triate cu mintea neajutată decît de creion și hîrtie. Este exploatarea virtuților ei verbale. A fost dedus tot ce se putea obține. Mecanismul gîndirii a fost cunoscut în maxima intimitate pe care o putea dezvălui cuvîntul gol... Atunci, în loc de propoziții și cuvinte, au fost scrise semne și simboluri. Logica s-a formalizat. Situații foarte complicate, în care mintea noastră neajutată se rătăcește, se pot rezolva cu ajutorul calculului imediat. Formalizarea nu a fost un lux. Matematizarea logicii a permis automatizarea unor operații mintale cu ajutorul mașinilor. Potențialul de a gîndi al omenirii s-a ridicat la o putere superioară prin acești doi factori fundamentali ai extensiunii: calcul și mașină”.

— Grozavă formulare! Aș spune că-i ca o pulbere de aur care dă strălucire „aurului cenușiu”.

— Stai, nu te grăbi, căci nu știu ce vei mai putea spune după ce-ți voi citi și fraza cu care se încheie eseul. Dar, înainte de a o face, aș vrea să te întreb dacă-ți mai aduci aminte cine a construit prima mașină de calcul, mai precis de făcut adunări?

— Mai încape vorbă? Pascal, matematicianul și filozoful Blaise Pascal, ca să-l ajute pe tatăl său să-și țină contabilitatea!

— Atunci dacă știi asta, ascultă și sfîrșitul acestui studiu care poartă numele de *Logica*: „Arta de a gîndi de pe timpul

lui Pascal include deci calculul simbolic și circuite electrice”.

— Foarte interesant. Cred că profesorul Mircea Malița se gîndește la cibernetică. Ei bine, află că acest subiect mă pasionează și am citit cîteva cărți apărute la noi, fără a intra, bineînțeles, în amănunte. Numirea a fost formată de Norbert Wiener de la cuvîntul grec *kibernetes* care înseamnă *cîrmaci* sau *pilot* și prima carte de Cibernetică a publicat-o tot el. A apărut în 1948, la Paris, cu titlul: *Cibernetica sau știința comenzilor și a comunicărilor la ființe și mașini*.

— Da fapt, se pare că ideile lui Wiener s-au conturat prin 1942. Atunci a înțeles el că se poate stabili o singură teorie cu privire la problemele de comunicare, comandă și mecanică statistică, care să fie valabilă pentru mașină și animal.

— Am citit undeva că cibernetica este modul de gîndire caracteristic omului în acțiune. Mie mi se pare destul de vagă această definiție. Ce crezi?

— Eu cred că ar trebui să-ți citesc cîteva fragmente din alt eseu, *Cibernetica și sisteme* în care profesorul Mircea Malița își spune părerile cu autoritatea omului de știință, dar și cu finețea sau subtilitatea literatului și filozofului. De pildă: „Cibernetica este o nouă atitudine în știință. Ea este afirmarea unei analogii între anumite mecanisme de funcționare a mașinilor și ființelor vii”.

— Așa da! Ultima frază mi-a spus ceva mai mult decît am știut pînă acum și totodată m-a lămurit, pentru că în ea se accentuează *problema analogiei*, nu dintre mașină și ființa vie, cum credeam eu, ci numai dintre *anumite mecanisme de funcționare* ale lor, ori asta-i cu totul altceva! De-abia acum înțeleg că sub denumirea de *feed-back* sau *contra-reacție* de care mă-ngrozeam eu se ascunde de fapt un *mecanism de funcționare*.

— Exact. Și ca să nu te mai îngrozească niciodată *feed-back-ul*, tradus cred că mult mai potrivit prin *retroacțiune* de autorul *Aurului cenușiu*, ascultă ce scrie el: „celebrul circuit al retroacțiunilor... O cutiuță are o intrare și o ieșire legate printr-o buclă exterioară... Cutiuța (mecanism sau organism) acționează în afară, dar culege prin buclă un semnal de ener-

gie joasă, care îi modifică acțiunea în funcție de condițiile exterioare. Iată, în linii mari, mecanismul de autoreglare sau autocontrol... Venită pe urmele schemelor de reflexe ale lui Pavlov, care afirma că organismul răspunde la schimbările din exterior, pentru a menține cu ele o stare de echilibru, cibernetica a dat un nou impuls biologiei și psihologiei. Ea s-a constituit într-o știință a comportamentului orientat și organizat, o știință a sistemelor autoguvernaate". Iar acum, te rog să fii numai ochi și urechi, fiindcă nu ți-e dat întotdeauna să găsești asemenea înlănțuiri de imagini din care să scapere ideile ca niște fulgere.

— Măi Todiriță, măi! Ochii îi am ca să văd și de văzut nu pot vedea decât culori, urechile le am ca să aud, și de auzit nu pot auzi decât sunete. Tu însă vrei să înțeleg și asta-i legată numai de gândire, nici de ochi și nici de urechi! Am ghicit eu cum de-ai luat-o așa pe ocolite. Freamăți de plăcerea frazelor ce vrei să mi le citești iar subconștientul tău a justificat această plăcere, învăluind-o în sentința lui Poincaré: „Gândirea nu-i decât un fulger între două nopți lungi, dar acest fulger este totul“, pe care poate că ai uitat-o. De aceea, în loc să fi continuat și tu a citi, așa cum ar fi făcut cineva mai stăpîn pe emoții, ai început să-mi ții un discurs cu ochi și urechi! N-am dreptate?

— Lasă-te mă rog de obiceiul acesta urît, de a întrerupe omul cînd îi este lumea mai dragă, fiindcă-i mai important cele ce am să-ți citesc eu acum: „Revoluția din secolul precedent fusese mecanică și pusese accent pe forță și lucru efectuat. A doua stă în micul semn de control care dirijează și modifică comportamentul sau acțiunea. Este trecerea de la o civilizație de mușchi la o civilizație de nervi“.

— Asta era? „Civilizație de mușchi și civilizație de nervi“! Ei, da! Te cred că-ți place înlănțuirea! Te rog citește ce urmează!

— Acum ar trebui să te las cu analizele matale, dar nu o fac, fiindcă în continuare sînt prea frumos prezentate problemele ciberneticii, și de aceea nici eu nu mă pot opri: „Ce reprezintă pentru evoluția gândirii umane mica schemă a retroacțiunii? În primul rînd, a stabilit primatul inteli-

genței în orice proces... Atunci când nu repetăm mecanic o acțiune în condiții exterioare modificate, ci ne adaptăm schimbărilor survenite, procedăm cibernetic. Inteligența este o adaptare... În al doilea rând, cibernetica a stabilit valoarea analogiei în raționamentul științific... Cibernetica a dus în limbajul științelor conceptele de ordine, informație, relație, circuit, mesaj, răspuns, receptor, control, dar mai ales „feed-back-ul”, adică retroacțiunea. Nu există ramură de activitate care să nu-și fi revizuit, în ultimele decenii, arsenalul metodelor în lumina acestor concepte...”

— Aș putea să-ți spun că și eu cunosc de mult o parte din cărțile profesorului Mircea Malița: *Repere*, *Sfinxul* și mai ales ultimele note de călătorie, intitulate cu așa de mult tîlc: *Pictre vii*. Nu ți-am spus-o atunci când ai vorbit de *Aurul cenușiu*, fiindcă tu doreai să-mi citești, iar eu eram curios să văd ce-mi mai aminteam și cum rezistă amintirile mele la lectura ta.

— Și când colo, ai constatat că totul era nou, ca și când nu ai fi citit niciodată nimic din carte!

— Exact. Am ascultat și nu recunoșteam textul, deși știu bine că l-am citit. Ți se întîmplă și ție asta?

— De cîte ori!

— Atunci e bine, căci eu pînă acum nu făcusem această experiență. Și fiindcă am discutat despre acest autor, află că atunci când am venit încoace, nepotul meu, Nucu, mi-a adus o carte și mi-a spus așa: „Dragă unchiule, cartea asta cuprinde tot ce-i mai nou în știință, care să te intereseze și pe mata și pe bădia Solonar. Dacă vrei, citește-o mata pe drum și pe urmă să i-o dai bădiei din partea mea.

— Cum vine asta, mă rog? Nucu îmi trimite o carte și tu pînă acum ai tăcut mîlc? Să știi că-s supărat foc!

— Mai domol, te rog, ai uitat ce-ai spus?

— Am spus eu ce-am spus, dar nu mi-am închipuit că ai fost în stare să faci asemenea lucru! Și de ce?

— Mai întîi, fiindcă pînă în clipa aceasta nu s-a ivit ocazia să vină vorba despre ea. Știi bine că în fiecare zi am avut cîte ceva de discutat și cum era să vin așa, hodoronc-tronc, cu altă problemă? Fiindcă bănuiești, cred, că nu m-aș fi

mulțumit să-ți înmînez cartea fără să o discutăm, măcar cît de cît! Asta-i mai întîi, dar după asta mă mir și mă minunez că nici nu m-ai întrebat despre ce carte e vorba?

— De ce să te întreb? Te rog să faci bine și să o aduci îndată aici, că m-oi pricepe eu singur să-i citesc titlul.

Cînd i-am întins cartea, Teodor Solonar era emoționat, l-am cunoscut după glasul răgușit cu care a murmurat, mai mult pentru el: „Revoluția științifică-tehnică și progresul”¹. După aceea, răsfoind-o, m-a privit și mi-a spus: A fost o surpriză pentru mine și mă bucură. N-aveam de unde să o cunosc, fiindcă în ultima vreme nu am mai putut hoinări prin librării. Văd că în carte sînt o serie de comunicări ce au fost ținute în București în anul 1974, și prima este a profesorului Mircea Malița. Acum e clar de ce mi-ai spus abia acum.

— Vezi? Cred că apreciezi faptul că am procedat cibernetic! Nu-i și cibernetica un mod de acțiune și anume acela care conduce acțiunea în așa fel, ca ea să fie eficace?

— Asta da, numai că în cazul de față nu prea văd unde-i eficacitatea? Eu știu atîta, că mă apuc imediat să o citesc, la noapte, mîine... Tu dacă vrei, te poți plimba oleacă prin pădure. Dacă prietenul meu Aurel Popescu nu-i plecat la Dorna cu vreun proces, cred că va fi încîntat să te întovărească.

— La asta m-am gîndit și eu, fiindcă oricum, tot trebuia să mă duc să-i dau binețe. Dar cu „eficacitatea”... chiar că nu o vezi?

— Nu.

— Eu cred că am atins maximum de eficacitate și iată de ce: în cadrul discuțiilor noastre, *condițiile exterioare s-au modificat*: eu ți-am prezentat o carte pe care, cu drept cuvînt, Nucu a clasificat-o printre cele mai *lăcomoase* și pe care eu am citit-o, dar tu nu. Rămîne să o citești și tu, adică să *te adaptezi schimbării survenite* în relațiile noastre. Astfel, de data aceasta nu se va repeta acțiunea în mod mecanic, adică

¹ *Revoluția științifică-tehnică și progresul*, Editura Politică, București, 1974.

în discuția noastră nu voi fi eu la cheremul matală, ci vom discuta această carte *de la egal la egal!*

— Mai cibernetic nici nu se poate! Va să zică, asta înseamnă pentru tine *maximum de eficacitate*? Știi ceva? Ca să fie și mai maxim, n-ar fi mai bine să conduci tu discuția? Să ascult și eu odată și mai ales să fiu eu acela care să pună întrebările! De-abia aștept să fiu și eu la cheremul matală, dar pînă atunci, hai la masă, că pentru ziua de azi, ne-a fi de ajuns!

PROBLEMA REVOLUȚIEI ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

sau

CUM S-A OPUS STATISTICA LA CREAREA UNUI MIT

Sugestia lui Teodor Solonar ca să fac o plimbare prin pădure cu prietenul său, — avocatul Aurel Popescu —, a avut drept urmare o ședere de trei zile la cabana Rarău, de unde *inspectam* zilnic munții dimprejur. Când ne-am întors acasă, l-am găsit pe Teodor Solonar cu masa plină de cărți, și mai ales de caiete, puse toate claie peste grămadă. Nu-i spuseseam când ne vom întoarce și îndată ce ne-a văzut, a alergat să pună de cafea. Când i-am dat *raportul*, a aflat că la discuția ce urma să o avem în legătură cu „revoluția tehnică și științifică” avea să ia parte și Aurel Popescu, pe care-l interesa problema.

Aurel Popescu fiind în concediu, am stabilit să ne întâlnim a doua zi dimineață, nu mai târziu de ora 7. Așa a fost. Exact la ora 7, am auzit portița scârțâind și ne-am văzut musafirul venind tacticos.

— Rămîne deci să atacăm problemele pe care acest prieten al meu din Tîrgul Ieșilor ni le va pune, „de la egal la egal”, a spus Teodor Solonar, privindu-mă pe deasupra ochelarilor, așa cum eram grupați în jurul mesei pe care erau așezate ceștile cu cafea.

— Eu aș propune ca, înainte de toate, să definim termenul de *revoluție științifică și tehnică* fiindcă el este o noțiune nouă, care include atît *revoluția științifică* cît și *revoluția tehnică*. Faptul îl probează însăși notația prescurtată R.Ș.T.

— Exact așa am gîndit și eu, dragă Aurel, și cît v-ați plimbat voi pe coclauri, am notat din cele scrise de profesorul Valter Roman, în articolul său: „Cu privire la teoria generală

a R.Ș.T.¹” că, deși denumirea de *revoluție științifică și tehnică* a fost folosită mai întâi de către J. Bernal, în 1954, noțiunea de R.Ș.T. s-a conturat mult mai târziu, în mod treptat, după discuții îndelungate.

— Am impresia că sesiunea științifică organizată de secția de științe sociale și politice a Academiei Republicii Socialiste România, cu tema „*Revoluția științifică-tehnică și progresul*”, din 1974, a adus soluții noi în această problemă, chiar dacă ar fi să mă gândesc numai la comunicarea profesorului Mircea Malița asupra căreia era vorba că vom insista, dar despre care însă nici nu am început să discutăm. Până atunci însă voi relua articolul profesorului Valter Roman, de la care ne-am îndepărtat. Uite, la pagina 107: „Procesul revoluționar în științele moderne ale naturii, apariția unor salturi în aceste științe, cât și în tehnică, datorită unor descoperiri noi, au fost semnalate și studiate încă înaintea apariției termenului R.Ș.T.... pătrunderea în microcosmos și în macrocosmos ș.a. au fost supuse studiului și interpretărilor filozofice înainte de a se fi ajuns la concluzia că avem de-a face cu un proces revoluționar care cuprinde întregul (sau aproape întregul) domeniu al științelor naturii;... că e vorba de un proces unitar în știință și tehnică, corelat, la rîndul său, în mod dialectic cu profundul proces social mondial contemporan; că are loc o schimbare radicală a locului și rolului social al științei în epoca contemporană, iar acest proces revoluționar din infra și tehnostuctura societății contemporane exercită un impact puternic și multilateral asupra tuturor laturilor vieții economice, sociale, politice, culturale etc. ale societății, ducînd la accelerarea procesului istoric; că se schimbă radical însăși poziția omului în producție, în societate ș.a.”

— Aceste rînduri au conturat și mai precis conținutul termenului R.Ș.T., de aceea vreau eu să atrag atenția asupra faptului că dacă revoluția științifică datorează foarte mult matematicienilor, R.Ș.T. îi este îndatorată și mai mult.

¹ *Revoluția științifică-tehnică și progresul*, Editura Politică, București, 1974, pag. 105.

Fără dezvoltarea și mai ales desăvârșirea metodelor matematice nu s-ar fi putut păși la R.Ș.T. Să luăm numai câteva exemple: fără dezvoltarea *teoriei funcțiilor de variabilă complexă* nu ar fi fost posibilă dezvoltarea comunicațiilor prin radio și televiziune, fără *teoria grupurilor*, a *probabilităților* și mai ales a *statisticii matematice* nu s-ar fi putut dezvolta fizica modernă și deci nici R.Ș.T. La începutul secolului al XX-lea nimeni nu ar fi putut prevedea că în câteva decenii, în toate universitățile din lume se vor înființa catedre de Statistică matematică deși cuvântul *statistică* a apărut cam de pe la jumătatea secolului al XVIII-lea, derivând de la cuvântul latinesc de largă circulație prin secolul al XVII-lea, „*statisticus*”, cu înțeles de „relativ la stat”. Desigur că pe atunci, acest cuvânt circula numai între specialiști, de pildă, în cadrul societăților de asigurare și nu în viața de toate zilele.

— Nu prea înțeleg ce vrei să spui! Cum relativ la stat? am întrebat eu.

— La *stat* cu înțeles de stare, adică de *felul de a fi al unui lucru*! Așadar, *statistica* avea pe atunci înțelesul de studiu sau informație cu privire la anumite fapte sociale, exprimate prin procedee numerice, clasificări, numărări, recensămînturi etc.

— Cred că ar fi fost mai simplu, dacă ai fi pomenit despre primele tabele statistice privind mortalitatea, ce au fost întocmite de John Graunt, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea, după câte îmi amintesc eu!

— Nu cunosc chestia asta, așa că spune-ne tu ce știi despre această îndeletnicire, cu aspect destul de macabru, a domnului Graunt!

— Macabru, macabru, dar foarte necesar! John Graunt, pe care l-a preocupat, probabil, durata vieții omenești și cauzele morții, ca dealtfel pe mulți alții, printre care aș reaminti de matematicianul Cardan, a luat registrele stărilor civile ale orașului Londra, care, începuseră a fi întocmite cu vreo 70 de ani mai înainte, și a extras din ele datele ce-l priveau, întocmind liste asupra bolilor ce au provocat moartea, vîrsta, sexul și ocupația indivizilor, toate aceste date fiind

exprimate în procente din numărul total de decese înregistrate în acest timp.

— Aurel are dreptate, tabelele acestea cred că au interesat!

— Și încă cum! Îndată după publicarea tabelelor sale, a și fost propus ca membru al Societății regale din Londra, iar ideile lui au căpătat de îndată o aplicație practică: asigurările. Peste 30 de ani, cunoscutul astronom E. Halley a publicat, inspirat de lucrarea lui Graunt, primele tabele de asigurare pe viață, necesare Societăților de asigurare, societăți care sînt și azi în floare. Însă azi, semnificația cuvîntului *statistică* s-a lărgit mult, cuprinzînd și pe aceea de mulțime a tehnicilor de interpretare, pe baze matematice, ale fenomenelor asupra cărora nu se poate face un studiu individual al elementelor care intră în joc, aceasta din cauza mulțimii lor.

— Aș spune mai bine că astăzi, cuvîntul *statistică* are două înțelesuri diferite: acela *prim*, de *informație numerică* prezentată fie sub formă de tabele, fie sub formă de *grafice* și al doilea, *tehnic*, în care se cuprinde denumirea unei *științe noi* ce se ocupă cu stabilirea legilor probabile ale unui fenomen, legi care se deduc în mod inductiv, din datele statistice înregistrate cu privire la desfășurarea lui.

— Stai măi bădie, că iar m-am încurcat! Ai spus *din cauza mulțimii elementelor* nu se poate face un studiu individual al lor, iar acum vorbești de datele *statistice înregistrate*. Prin urmare, iată că se pot înregistra aceste elemente, adică fiecare dintre ele!

— Nu, nu se poate înregistra *fiecare dintre aceste elemente*, practic numărul lor poate fi nedefinit de mare, să zicem milioane de indivizi sau milioane de saci de grâu sau de cafea. Prin *date statistice* se înțeleg datele obținute prin *sondaje* făcute în acele mulțimi. Se fac sondaje, sau probe, *obligatoriu la întîmplare*, iar din aceste sondaje sau, dacă vrei, pe baza acestor eșantioane (sau probe) se întocmesc tabelele statistice din care trebuie să se poată spune:

(1) care sînt concluziile relativ la întreaga mulțime a elementelor;

(2) cît de sigure sînt aceste concluzii.

— Așa da, acum am înțeles și mai ales îmi explic cum au devenit metodele statistice instrumentele indispensabile în toate domeniile activităților sociale, ca de pildă și în psihologia experimentală, fiindcă în biologie ea a fost folosită mai de demult!

— Nu știu dacă aveți cunoștință de faptul că Wells, acel mare scriitor și vizionar, a prevăzut și aceasta, scriind că „gîndirea statistică va deveni într-o zi tot așa de necesară pentru societate ca și priceperea de a citi și a scrie”.

— Eu, cel puțin, nu am cunoscut această prezicere, dragă Aurel, dar pot constata că n-a așteptat nici o jumătate de secol ca să se adeverească!

— Atunci, fiindcă ai aflat și tu un lucru de la mine, am și eu o pretenție! Plătește-mi cu aceeași monedă, și anume, spune-mi cum a început și cum s-a dezvoltat *calculul probabilităților*. Mă interesează fiind așa de strîns legat de statistică. Doream eu să citesc și despre acest lucru dar, ba azi, ba mâine, uite că n-am mai ajuns să o fac iar acum, văd că i-a sosit timpul.

— De la jocul cu zarurile, care în latinește se numea *alea* vine și cuvîntul *aleator* adică *întîmplător*, a început Teodor Solonar, după ce a pus de o parte ceașca de cafea. Iar problema combinațiilor cîștigătoare la jocurile cu zarul, l-a preocupat și pe Cardan, dealtfel un mare jucător. El a scris, se pare, prima carte în care se discută probleme legate de probabilitatea de a obține combinațiile cîștigătoare, dar această carte a fost publicată postum, în operele lui complete. Ca dată a nașterii calculului probabilităților se consideră anul 1654, dată la care B.Pascal a publicat *Tratat despre triunghiul aritmetic* și, totodată, a avut loc un schimb de scrisori între el și P.Fermat, avînd ca subiect calculul șanselor într-un joc de noroc, respectiv de zaruri, fiindcă pe atunci acest joc era extrem de răspîndit. Nici unul dintre ei nu era jucător de zaruri însă corespondența dintre ei a fost provocată de întrebarea pe care i-a pus-o lui Pascal un jucător celebru, cavalerul de Méré, rămas în istorie tocmai prin această curiozitate ce a încercat să și-o satisfacă. Anume, el i-a pus lui Pascal următoarea întrebare: Dacă doi ju-

cători, de forță egală, doresc să întrerupă o partidă de zaruri înainte de a o fi terminat, cum trebuie împărțită în mod echitabil, suma depusă în joc, cunoscând numărul de puncte realizat de fiecare și mizele lor? De fapt, problema fusese pusă mai demult, de alții, cu un secol mai devreme și se află în cărțile lui Luca Pacioli, Cardan și Tartaglia, însă nimeni nu a știut cum să o rezolve. Pascal a găsit soluția, stabilind noțiunea de probabilitate și formula care exprimă numărul combinărilor de n obiecte luate câte p , (C_n^p) , număr care se află exprimat chiar în triunghiul aritmetic, numărul liniei fiind acela al obiectelor.

— Cunoasc acest triunghi. El se obține fără a ști nici o formulă, fiindcă încep cu 1, pe linia a doua scriu iar doi de 1 și apoi, încep să scriu, întâi 1, apoi suma numărului de deasupra cu a celui din stînga lui:

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

— Exact. Însă, numărînd liniile și coloanele, începînd de la zero, ultimul rînd pe care l-ai scris, al patrulea cuprinde: $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$ ș.a.m.d. Cum era moda pe atunci, cînd nu se scriau reviste matematice, Pascal a trimis soluția sa lui Fermat, printr-o scrisoare, iar acesta i-a răspuns, arătîndu-i o altă metodă de a ajunge la același rezultat. Aceste scrisori au circulat și au stîrnit curiozitatea matematicienilor față de asemenea probleme, pe atunci cu totul originale. Așa se făcea că, numai după trei ani de la publicarea *Tratatului despre triunghiul aritmetic* a apărut o nouă carte, scrisă de Chr. Huygens intitulată chiar *Despre calculele asupra jocurilor de noroc*, iar peste o jumătate de secol, N. Bernoulli, a publicat lucrarea rămasă neterminată de unchiul său, J. Bernoulli, intitulată *Arta conjecturii* sau cum îi spunem noi mai simplu, a *presupunerilor*. În ea este comentată lucrarea lui Huygens și sînt adăugate noi formule care fac parte azi din domeniul numit al Analizei combinatorii.



— Înseamnă că acestea se petreceau pe la începutul veacului al XVIII-lea?

— Da. În acest veac s-au scris mai multe lucrări prin care s-au precizat problemele care intră în domeniul calculului probabilităților; de pildă evaluarea erorilor rezultate din observațiile experimentale cu ajutorul unor legi, exprimate matematic, prin care să se poată stabili repartiția lor. Dar lucrarea fundamentală în acest domeniu a apărut abia la începutul veacului al XIX-lea: *Teoria analitică a probabilităților* și a fost scrisă de Laplace. De-abia de aici înainte calculul probabilităților a devenit un instrument de cercetare ce putea fi folosit în matematici, fizică, astronomie și chiar în statistică.

— Iată un exemplu care s-ar putea încadra între acelea date în volumul „Șocul viitorului”¹. Au fost necesari 200, dacă

¹ T o f f l e r., A., *Șocul viitorului*, Editura Politică, București, 1973.



J. BERNOULLI

nu 300 de ani ținând seamă și de încercările lui Cardan, până când matematicienii au fost în stare să găsească o teorie a calculului probabilităților!

— Exact! Uite aici, la capitolul intitulat „Motorul tehnologic”, autorul alege cîteva exemple, bazate pe date statistice, prin care să illustreze modul în care „accelerația (în toate procesele tehnologice) apare uneori în mod spectaculos”. Astfel urmărește procesul de creștere a vitezei mijloacelor de transport și arată că de la viteza mijlocie de 13 km/h care o realizau caravanele de cămile, cu 6 milenii î.e.n., s-a ajuns, după 4 milenii, la aceea de 30 km/h, atunci când au apărut căruțele trase de cai. Această viteză n-a fost însă depășită aproape alte 4 milenii, fiindcă „prima diligență care a început să circule în Anglia, în 1784, nu realiza în medie mai mult de 16 km/h”. Nici în 1825 „prima locomotivă cu abur” nu avea o viteză mai mare decît 20 km/h. Așadar, în 8000 de ani oamenii nu au putut mări viteza de transport decît de la 13 la 30 km/h. Însă, după ce în 1880

se atinsese viteza de 160 km/h și în 1938, 500 km/h, creșterile au urmat fulgerător". În 1960, avioanele rachetă s-au apropiat de viteze de 6 000 km/h iar oamenii, în capsule spațiale, înconjurau pământul cu 28 000 km/h". Chiar și din domeniul matematicilor aduce un exemplu destul de interesant, după mine. „Apollonios din Perga a descoperit secțiunile conice, dar abia peste 2000 de ani acestea au fost aplicate în problemele de mecanică”.

— Exemplul este bine ales numai că ar fi fost mai precis dacă în loc de mecanică s-ar fi vorbit despre astronomie sau cel puțin despre mecanică cerească!

— Poate, dar fiindcă tot ți-ai întrerupt povestea, te-aș ruga ca, înainte de a o urma, să mai lămurim câte ceva din înțelesul însuși al acestui cuvânt, *probabilitatea*. Și iată de ce: Atunci când mă plimbam pe munte, cu prietenul tău din Iași, vorbind de una, de alta, i-am spus așa: „*Probabil*” că bunicul meu după mamă a umblat cu oile pe Rarău. Azi, pe când vorbeai despre jocurile de noroc, mi-am zis și eu așa într-o doară: *probabil* că de data asta am să câștig la loto, căci joc aceste numere de atîta vreme! Ei bine, eu cred că între aceste două moduri de a folosi cuvîntul *probabil*, este o deosebire fundamentală! Întîmplarea, adică tragerea numerelor la loto, *poate fi repetată* și dacă nu voi câștiga de data aceasta ar fi probabil să câștig data viitoare, sau altă dată. Așadar, în acest caz, cuvîntul *probabil* exprimă o *speranță*, un fel de încredințare că evenimentul se poate îndeplini. Când însă am folosit cuvîntul *probabil* în legătură cu bunicul meu, înțelesul lui era de o altă natură fiindcă întîmplarea pe care am considerat-o ca probabilă nu se mai poate repeta și deci, nu am posibilitatea să stabilesc dacă acea probabilitate s-ar putea schimba într-o realizare a întîmplării din trecut sau nu!

— Ai pus problema avocătește și totuși exact cum este pusă și din punct de vedere științific. În matematici, cuvîntul *probabilitate* se folosește *numai* atunci când avem de-a face cu evenimente ce se pot repeta ori de câte ori avem trebuință. Numai în acest caz se vorbește de *probabilitatea ca un eveniment să aibă loc* și, într-un mod intuitiv, ea se

P.S. LAPLACE



măsoară sau se exprimă prin frecvența evenimentului în cauză, adică prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul total de cazuri posibile. Așadar, cu cât acest raport se va apropia de unitate, cu atât și probabilitatea respectivă se va apropia de siguranță. În speță, cu cât ai să cumperi mai multe bilete de loto, desigur că nu cu aceleași numere, cu atât mai mare va fi probabilitatea să câștigi!

— Stai că aici te-am prins la strâmtoare! Am prieteni care au câștigat cumpărând numai un singur bilet și alții care nu au câștigat nici cu 20, nici chiar cu 100 de bilete! Probabilitatea despre care-mi vorbești este una iar șansa, hazardul este cu totul alta! Asta-i cum ai noroc!

— Să știi că nimic nu-i nou sub soare, dragă Aurel! Problema aceasta a fost dezbătută pe larg de către unii matematicieni din secolul al XIX-lea care, cu toată perfecțiunea cărții compusă de Laplace, nu s-au grăbit să-l primească, cu brațele deschise pe acest nou vlăstar al matematicilor, nu-

mit *calculul probabilităților*. Din contra! Au ridicat și ei obiecțiunea adusă de tine, alegînd exemple de netăgăduit din fizică etc.

— Cred și eu, fiindcă orice ai spune tu, te afli într-un loc în care terenul îți fuge de sub picioare. Tu calculezi *probabilitatea*, îți spui fericit că ai multe șanse de reușită iar *hazardul* își bate joc de tine și cînd nu te aștepți, îți dă cu tifla.

— Aparent ai dreptate. În realitate nu o ai, dovada cea mai bună este că această teorie a probabilității este unul dintre pilonii cei mai solizi pe care se sprijină întreaga revoluție științifică și tehnică, revoluție care este o realitate. La mijloc este un chițibuș, pe care trebuie să punem noi mîna și cred că de ajutor ne vor fi cele două articole pe care le-a scris H. Poincaré, unul în *Știință și ipoteză* cu titlul *Calculul probabilităților* iar celălalt în *Știință și metodă*, intitulat *Hazardul*.

— Poincaré? Nu am citit cărțile lui de cînd eram flăcău! Credeam că au fost uitate!

— În schimb noi doi ne-am delectat citindu-l chiar zilele trecute, înainte de a ne plimba pe munte. Scrierile lui Poincaré sînt țesute dintr-un material durabil care nu se decolorează nici nu se destramă. Te vei convinge singur, nu are nevoie să-i facem reclamă!

— Atunci am să deschid cartea la articolul *Calculul probabilităților*. Începe făcînd aluzie la anumite experiențe din fizică și aceasta îl face să observe: „Într-o mulțime de împrejurări, fizicianul se află în aceeași situație ca și jucătorul care-și apreciază șansele. Ori de cîte ori raționează prin inducție, el folosește, mai mult sau mai puțin conștient, calculul probabilităților... Însuși numele de calcul al probabilităților este un paradox: probabilitatea, opusă certitudinii, este ceea ce nu știm și cum se poate calcula ceea ce nu cunoaștem? Totuși mulți savanți eminentei s-au ocupat de acest calcul și nu s-ar putea nega că știința nu a profitat. Cum să explicăm această contradicție aparentă?”

— Așa gîndesc și eu. Și cum rezolvă el problema?

— El spune că nu o rezolvă, deși, după ce ai terminat articolul, simți că ți s-a ridicat o piatră de pe inimă. Uite, îți citesc întîi „Concluziile”. Aici spune: „În rîndurile precedente

am pus multe probleme fără să rezolv vreuna. Nu regret, totuși, că le-am scris căci ele vor îndemna poate pe cititor să gîndească la aceste probleme delicate. Oricum ar fi, există anumite puncte care par bine stabilite... Ca acest calcul să aibă un sens, trebuie să admitem ca punct de plecare o ipoteză sau o convenție care comportă totdeauna ceva arbitrar. În alegerea acestei convenții, nu putem fi conduși decît de principiul rațiunii suficiente. Din nefericire, acest principiu este vag și foarte elastic... forma în care l-am întîlnit mai des este credința în continuitate... fără de care știința ar fi imposibilă”.

— Frămîntări filozofice!

— Da, dar nu vane, ci constructive. Iată un exemplu: „Un jucător vrea să-și încerce norocul și-mi cere sfatul. I-l dau, bazat pe calculul probabilității, dar nu-i garantez succesul. Numesc aceasta *probabilitate subiectivă*. Dar presupun că un observator asistă la joc, că notează toate rezultatele și că jocul se prelungește mai mult timp: cînd va face socoteala partidelor notate în carnet, va constata că evenimentele s-au repartizat conform cu legile calculului probabilităților. Pe aceasta o voi numi *probabilitate obiectivă* și acesta este fenomenul ce ar trebui explicat. Există numeroase societăți de asigurare care aplică regulile calculului probabilităților și ele distribuie, prin tragerile de amortizare, cîștiguri, a căror realitate obiectivă nu poate fi contestată”.

— Despre societățile de asigurare, am citit cîndva că și renumitul astronom Arthur Eddington a spus așa: „Viața omului este în mod proverbial nesigură, dar puține lucruri sînt așa de sigure ca solvabilitatea unei societăți de asigurare pe viață”. A spus-o, nu ca să facă reclamă societăților de asigurare, ci pentru ca, în ciuda hazardului, să confirme încrederea în valabilitatea calculului probabilităților. Sînt curios să văd ce părere are Poincaré despre hazard?

— Nimic mai ușor, decît schimbînd volumul. Capitolul IV din *Știință și metodă* te poate lămuri! La întrebarea: ce este hazardul? răspunde: „Anticii deosebeau fenomenele care păreau să asculte de legi pline de armonie, stabilite o dată pentru totdeauna, de acelea pe care le atribuiau ha-

zardului; erau acelea ce nu puteau fi prevăzute, fiind rebele oricărei legi". Examinînd această noțiune din multe puncte de vedere, Poincaré consideră că „hazardul nu este altceva decît măsura ignoranței noastre”.

— Atunci hazardul nu-i chiar hazard?

— Nu. Iată unul dintre exemplele date de el, acela al trecătorului căruia îi cade în cap o țiglă, scăpată în clipa aceea de un lucrător ce repara acoperișul unei case pe sub care trecea el, și-l omoară. „Ar fi fost de ajuns ca trecătorul să fi sosit cu o secundă mai devreme” și nenorocirea nu ar fi avut loc! În ce a constatat hazardul? În necunoașterea fenomenelor ce se petreceau în jurul trecătorului sau al lucrătorului. Două lumi diferite, fără nici o legătură una cu alta, dar care la un moment dat au acționat una asupra alteia, fără ca faptul să fi fost observat, deși, teoretic, ar fi fost, posibil. „O cauză foarte mică ce ne scapă”, arată Poincaré, „determină un efect considerabil pe care nu putem să nu-l vedem și atunci spunem că acest efect se datorează hazardului. Dacă am cunoaște exact legile naturii și situația Universului la momentul inițial, am putea prezice situația acestui Univers într-un moment ulterior. Dar, chiar dacă legile naturii nu ar avea secrete pentru noi, nu putem cunoaște situația inițială, decît *cu aproximație*... s-ar putea ca diferențe mici în condițiile inițiale să ducă la diferențe foarte mari în fenomenele finale... prezicerea devine imposibilă și avem fenomenul neprevăzut”. Poincaré era un adept al determinismului: „orice fenomen, cît de neînsemnat ar fi, are o cauză”, scria el,¹ dar aceasta nu l-a împiedicat să recunoască caracterul obiectiv al întîmplării. Iată ce scria, de exemplu, în legătură cu teoria erorilor: „Nu știu cui se datoresc erorile întîmplătoare, dar tocmai pentru că nu cunoaștem cauza lor știm că ele vor asculta de legea lui Gauss. Acesta-i paradoxul... Noi nu trebuie să știm decît un lucru: că erorile sînt foarte numeroase, că sînt foarte mici, că fiecare dintre ele poate fi tot așa de bine pozitivă ca și negativă. Care-i curba de probabilitate pentru fiecare dintre ele? Nu știm nimic, presupunem doar că această curbă este simetrică. Se dovedește atunci că eroarea rezultată va urma legea lui Gauss și

această lege rezultantă este independentă de legile particulare pe care nu le cunoaștem“.

— Dacă nu mă înșel, în *Dialectica naturii*, Engels spunea că: „întâmplarea își are rolul ei în dezvoltarea istorică, rol care în gândirea dialectică se rezumă la necesitate“.

— Da, el insista chiar asupra faptului că „întâmplarea reprezintă o formă de manifestare a necesității, iar necesitatea, ca tendință dominantă, își croiește drum prin mulțimea întâmplărilor“.

— Cele ce v-ați amintit voi doi nu sînt decît argumente care să întărească observația lui Poincaré cu privire la legea de distribuție a erorilor întâmplătoare, extraordinară și minunată lege! Este ca o ordine izvorîită din haos, ordine care se exprimă în mod grafic prin curba *clopot* (fig. 7), curbă a cărei ecuație a fost stabilită în mod teoretic de Laplace și de Gauss, și care se obține nu numai în cazul erorilor, dar și în toate procesele statistice, cînd sub formă simetrică, cînd asimetrică sau cu accentuarea numai a unei singure ramuri, dînd astfel posibilitatea să se tragă concluzii precise asupra

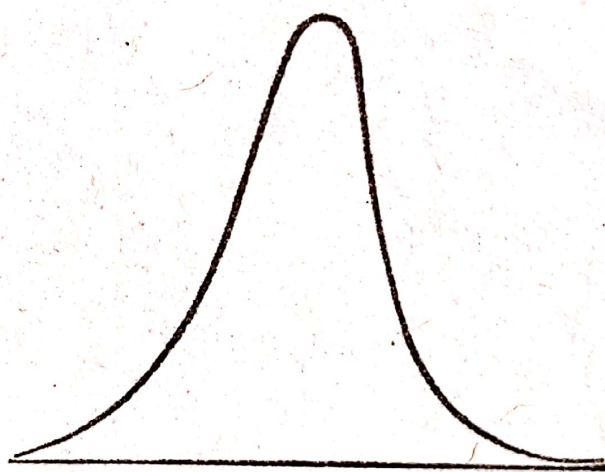


Fig. 7

caracterului mulțimii puse sub observație. Fr. Galton, bine cunoscut prin aplicațiile în antropologie ale calculului statistic, scria: „Cu greu aș putea găsi ceva capabil să impresioneze imaginația mai mult ca minunata formă a ordinii cosmice exprimată prin *legea frecvenței erorilor*. Dacă ar fi cu-

noscut-o grecii, ar fi personificat-o și zeificat-o. Ea domnește cu seninătate printre cele mai sălbatice confuzii. Cu cât este mai mare dezordinea unei mulțimi, cu cât este mai mare anarhia ei aparentă, cu atât mai perfectă este puterea ei. Este legea supremă a iraționalului. Ori de câte ori se ia în mână o probă de elemente haotice și se ordonează după mărimea lor, o formă de o neașteptată și minunată regularitate dovedește că era ascunsă, demult, în ea“.

— Se cunoaște faptul că Galton a creat școala biometrică engleză, tocmai prin aplicarea cu succes a metodelor statistice în biologie. Statistica și legile ei sînt azi privite ca oferind posibilitatea să cunoaștem mai bine și să înțelegem mai bine Universul în care trăim. Revoluția științifică și tehnică...

— În fine, bine că ți-a ieșit odată și cuvîntul acesta din gură! Poate că tot ne hotărîm noi să începem a discuta problema care ne-a adunat aici azi dimineață!

— După cum îmi pare mie din lucrările citite pînă acum, a început Teodor Solonar, nemaiîntîlnita accelerare în ritmul actual al descoperirilor științifice și tehnice a trezit un fel de îngrijorare în rîndul celor preocupați de marile probleme contemporane.

— Cred că era și natural să fie așa. Nu ai cum înlătura faptele exprimate de cercetările statistice. Mai înainte v-am citit unul dintre cazurile descrise în *Șocul viitorului*. Atunci ne-am luat cu vorba și n-am mai apucat să vă citesc un alt caz, care m-a impresionat îndeosebi. Iată-l: „Ritmul în care omul a adunat cunoștințele folositoare despre el și despre Univers a crescut în spirală timp de circa 10 000 de ani. Ritmul a făcut un salt mare înainte, odată cu inventarea scrierii... următorul mare salt a avut loc odată cu inventarea tiparului mobil, în secolul al XV-lea, de către Gutemberg și alții. Pînă la 1500..., Europa producea cărți într-un ritm de 1 000 de titluri pe an... după patru secole și jumătate (1950) ritmul se accelerase în așa măsură, încît Europa producea 120 000 mii de titluri pe an. În 1960, cu numai 10 ani mai tîrziu, ritmul făcuse alt salt important, astfel încît activitatea unui secol putea fi înfăptuită în numai șapte luni și jumătate. Iar pe la mijlocul anilor '60 producția de cărți pe scară mon-

dială, inclusiv Europa, se apropia de cifra fantastică de 1 000 de titluri pe zi... De altfel, se pare că ritmul crește în continuare.... Pe plan mondial, literatura științifică și tehnică crește în fiecare an cu aproximativ 60 000 000 pagini". Părerea că trăim într-un iureș de schimbări a cărei frână am pierdut-o a devenit o obsesie și tinde să se transforme în mit.

— Exact, și tocmai din cauza aceasta doream așa de mult să comentăm împreună articolul profesorului Mircea Malița intitulat: „Mutații și inovații în metodologia și demersul gândirii științifice”. El are o viziune cu totul originală a fenomenului și reușește să distrugă acest mit îngrijorător, folosind aceleași metode statistice care au contribuit la formarea lui, pe care le privește însă cu mai multă atenție și cu un anumit discernământ.

— Atunci, ia-o matale, bădie, mai pe-ncetișorul, sistematic și de la început, fiindcă, drept să-ți spun, eu am citit articolul dar îmi face plăcere să-l aud din nou.

— Profesorul Mircea Malița începe prin a arăta că „Revoluția științifică și tehnică este îndeobște gândită în termenii *profunziunii*: a mecanismelor și a mașinilor, a instalațiilor și procedeele tehnologice, a descoperirilor științifice și invențiilor tehnice”. Ca să ilustreze intensitatea acestor explozii sui-generis, alege și câteva exemple: „90% din oamenii de știință ai tuturor timpurilor ne sînt contemporani... în 5 minute apare o formulă chimică nouă”. Numai că, profesorul Mircea Malița nu s-a lăsat impresionat de acest aspect exterior al transformărilor petrecute în ultimii ani și a încercat să înlăture pojghița de staniol cu sclipire argintie ca să privească în adîncul procesului în curs de dezvoltare și să-i urmărească evoluția lui reală. Și iată ce observă el: „În ordine logică, creșterea numărului de lucrări într-un anumit domeniu al matematicii pe o perioadă dată, de exemplu, nu este neapărat un semn al dezvoltării viitoare a respectivului domeniu; lucrări mai multe apar, desigur, și ca o ilustrare a interesului pentru o problemă, dar pot fi și legate de dificultățile reduse de depășit, de exploatarea entuziastă a oricărei noutăți sau de modă... Dezvoltarea explozivă a unui domeniu al științei poate fi astfel și un indi-

cator al stabilizării viitoare... după cum momentana neglijare a unui capitol poate fi semnul actualității sale viitoare”.

— Va să zică așa se pune problema? Știi că are dreptate?

— Știu, cum să nu știu. Ascultă mai departe: „Dar oare „măsurători” ale științei care să depășească numărul, încercînd să surprindă progresul cunoașterii, justifică totdeauna impresia de creștere exponențială? Studii de sociologia științei arată că, în timp ce 90% din oamenii de știință ai tuturor vremurilor ne sînt contemporani... numai 2% emit idei cu totul originale; și obiectivitatea ne-ar cere să recunoaștem că, dacă, într-adevăr, densitatea descoperirilor științifice și a invențiilor a crescut spectaculos în ultimii ani, printre acestea sînt însă puține cele cu caracter major și că, în fond, lucrăm în linii mari pe „fișierul” croit în prima jumătate a secolului. Se poate discuta deci dacă, într-adevăr, condițiile favorizante ale exploziei științei și tehnicii se conservă în viitor și, după cum se vede, dacă intensitatea acestei explozii justifică ipotezele inerțiale de creștere continuă”.

— Dacă-mi aduc bine aminte, un singur factor motor rămîne în picioare: necesitatea de a satisface cerințele...

— Într-adevăr, însă aprofundînd problema, autorul constată că „dinamica nevoilor poate impulsiona direct numai o parte a științei și tehnicii... dar pentru descifrarea completă a mecanismelor de integrare a științei în viața socială și de evoluție a însăși configurațiilor științei este necesară și investigarea resorturilor intime ale articulațiilor științei”.

— Aceste constatări conduc însă la o concluzie surprinzătoare: explozia informațională, științifică, tehnică etc., reprezintă *un moment* al R.Ș.T., dar *momentul esențial* este *mutația, schimbarea* în atitudine, în caracterul demersului și în metodologia științei.

— Ai fost concis, dragă Aurel. La acestea aș mai adăuga că toate marile înfăptuiri au însemnat, de fapt, o mutație. De pildă, în matematici o asemenea mutație s-a petrecut în secolul al XVII-lea cînd s-a trecut de la noțiunea de mărime constantă: număr, figură geometrică, la noțiunea de mărime variabilă, de funcție și la studiul dependenței funcționale.

S-a schimbat atunci metoda de lucru și totodată au apărut domenii de cercetare noi: Calculul diferențial și integral, Geometria diferențială, Mecanică analitică, Teoria funcțiilor etc. Dar revenind la cele spuse de tine, Aurel, vreau să mă opresc asupra procedeului, fiindcă el îmi apare ca o noutate, nu numai din punct de vedere al investigației, ci și al metodologiei. Mai întâi să-l ascultăm pe autor: „Părăsind raționamentele constatative și tendențiale... vom încerca o tratare de esență morfologică, ce va permite explicarea stadiului actual al dezvoltării științei și tehnologiei și va oferi temeuri riguroase optimismului, schițând și câteva dintre traiectoriile viitoare posibile ale evoluției cunoașterii și acțiunii umane”.

Terminând de citit, Teodor Solonar s-a uitat câteva clipe la mine și apoi mi-a spus:

— Ți-aduci aminte că ți-am mărturisit că aș dori să-ți pot povesti cândva despre prietenia dintre Sylvester și Cayley?

— Desigur, atunci când mi-ai vorbit despre vizita pe care i-a făcut-o Sylvester lui Poincaré.

— Ei bine, dacă aș fi căutat cu tot dinadinsul o ocazie, cred că nu s-ar fi potrivit mai bine ca aceasta care a venit de la sine, când nici nu mă așteptam. Și să vezi cum: ca să-și expună punctul său de vedere, profesorul Mircea Malița folosește o metodă surprinzător de ingenioasă, anume condensează tot ce are de spus pe o singură pagină, într-o *matrice*. Or, deși noțiunea de matrice își făcuse apariția în matematici, poate chiar de la sfârșitul secolului al XVIII-lea, numirea de *matrice* a fost dată de Sylvester, iar *teoria matricelor* a fost stabilită de Cayley! Povestea cred că nu-l va lăsa indiferent nici pe Aurel, dat fiind că amândoi i-au fost tovarăși de breaslă.

— Nu numai de aceea, ci fiindcă sînt curios să aflu cîte ceva despre matrice și teoria lor.

— Atunci află că orice tablou dreptunghiular de numere este o matrice, numerele din care este formată ea nu interesează. Când scrii niște numere, unele sub altele ai format o matrice cu o singură coloană, dacă scrii numerele în șir, pe același rînd, matricea se numește cu o singură linie; în gene-

ral însă o matrice are mai multe linii, să zicem m și mai multe coloane, fie ele p , iar aceste două numere (m și p) o caracterizează și o deosebesc de o alta. Dacă $m = p$, atunci matricea este pătrată și dacă $m = p = 1$, atunci matricea se reduce la un număr. Rezultă de aici că o matrice este ceva mai complicat decât un număr. Ca și în cazul numerelor, există o matrice ce poartă numele de *matrice nulă*, o alta care este *matrice unitate*, și, ținând seama de anumite reguli, matricele se pot aduna, scădea, înmulți cu un număr sau între ele. Numai că, spre deosebire de numere, în general, înmulțirea matricelor nu-i *comutativă*, adică nu-i tot una dacă înmulțești prima matrice cu a doua sau a doua cu prima, așa după cum se întâmplă în cazul numerelor când $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Dar cu toate că se pot face operații între matrice, o matrice în sine, în afară de faptul că vezi în ea un tablou de numere, nu are o valoare numerică, nu înseamnă nimic altceva decât ceea ce reprezintă ea, adică tabloul de numere. E cu totul altceva un *determinant*. Se scrie și acesta ca o matrice, dar când spui că este *determinant*, închizi tabloul de numere între două bare verticale și astfel tabloul de numere devine un simbol, cu o valoare numerică precisă, care se stabilește după anumite calcule făcute cu elementele determinantului. Dar noi nu ne vom ocupa de determinanți așa că i-am amintit aici numai pentru că, așa după cum a scris și Cayley, logic ar fi fost ca determinanții să fi apărut după matrice însă faptul istoric s-a petrecut invers. Noțiunea de determinant s-a impus de la sfârșitul veacului al XVII-lea, odată cu rezolvarea sistemelor de ecuații dar pînă la jumătatea veacului al XIX-lea nimeni nu s-a gîndit să dea vreo atenție specială tabloului de elemente în sine. Aceasta a făcut-o Cayley în 1858, dar din 1855 numele de *matrice* fusese inventat de Sylvester. Acum, înainte de a mai vorbi de matrice, să prezentăm și pe meșterii lor făurari. Sylvester era mai mare cu 7 ani decât Cayley. Numele lui era James Joseph, iar Sylvester a fost adăugat în urmă după numele ce-l luase un frate mai mare care emigrase în America. S-a născut la Londra în 1814 și de mic a dovedit un real talent pentru matematici. La 15 ani a obținut chiar un premiu pentru matematici al

Institutului regal din Liverpool, unde era atunci elev. Un an mai târziu avea să primească un altul, oferit de Întreprinderea loteriilor de stat din America, pentru o problemă de probabilitate pusă de această societate, la care lucra și frațele lui, care i-o trimisese pentru rezolvare. Iubea cu aceeași pasiune și literatura, cunoștea bine limbile clasice și moderne, scria poezii care i-au fost și publicate, avea o voce frumoasă și se spune că-i plăcea să cînte la întrunirile lucrătorilor, ca să-i distreze. Era plin de entuziasm, avea multă energie, dar era și foarte susceptibil, gata de ceartă cînd i se părea că a fost ofensat. Probabil că și din această cauză nu rămînea nicăieri prea mult. În 1838 a fost numit profesor de științele naturii la un Colegiu din Londra și în anul următor, la numai 25 de ani a fost ales membru al Societății regale din Londra, pe baza lucrărilor ce le publicase pînă atunci. O carieră frumoasă, s-ar spune, dar Sylvester o părăsește și în 1841 el era profesor în America, la Universitatea din Virginia. Numai pentru trei luni, căci se ceartă cu un elev, iar Universitatea nu-i dă satisfacția de a-l pedepsi pentru ofensă. Peste un an se întoarce la Londra și se angajează ca funcționar la o Societate de asigurare. E dezgustat de toate, chiar și de matematici, iar peste cîțiva ani se hotărăște să urmeze dreptul. În 1850 a fost admis în barou: „un porumbel printre vulturi” spunea el. Acum să-l căutăm pe Cayley. Artur Cayley s-a născut în 1821 și dovedind calități deosebite a fost trimis să studieze la Cambridge. La 21 de ani a fost clasat primul la examenul special de matematici și numit agregat la „Trinity College”. Lucrările lui de matematici curgeau cu duinul. De altfel, Cayley s-a clasat ca al treilea dintre matematicienii care au scris mai mult. Primii doi au fost Euler, Cauchy și apoi Cayley! Dar și el iubea cu pasiune literatura, însă nu citea orice, așa cum făcea Sylvester. El avea anumiți autori preferați: Walter Scott, Byron, Shakespeare, Thackeray. Cunoștea bine limbile clasice și moderne, îi plăceau ascensiunile în munți și picta. Așadar și Cayley ajunsese la o situație cum nu se poate mai bună. În fiecare vacanță pleca în străinătate, a urcat Alpii, a vizitat Italia. Și totuși, numai peste 4 ani părăsește Cambridge și pleacă la Londra.

Institutului regal din Liverpool, unde era atunci elev. Un an mai târziu avea să primească un altul, oferit de Întreprinderea loteriilor de stat din America, pentru o problemă de probabilitate pusă de această societate, la care lucra și frațele lui, care i-o trimisese pentru rezolvare. Iubea cu aceeași pasiune și literatura, cunoștea bine limbile clasice și moderne, scria poezii care i-au fost și publicate, avea o voce frumoasă și se spune că-i plăcea să cînte la întrunirile lucrătorilor, ca să-i distreze. Era plin de entuziasm, avea multă energie, dar era și foarte susceptibil, gata de ceartă cînd i se părea că a fost ofensat. Probabil că și din această cauză nu rămînea nicăieri prea mult. În 1838 a fost numit profesor de științele naturii la un Colegiu din Londra și în anul următor, la numai 25 de ani a fost ales membru al Societății regale din Londra, pe baza lucrărilor ce le publicase pînă atunci. O carieră frumoasă, s-ar spune, dar Sylvester o părăsește și în 1841 el era profesor în America, la Universitatea din Virginia. Numai pentru trei luni, căci se ceartă cu un elev, iar Universitatea nu-i dă satisfacția de a-l pedepsi pentru ofensă. Peste un an se întoarce la Londra și se angajează ca funcționar la o Societate de asigurare. E dezgustat de toate, chiar și de matematici, iar peste cîțiva ani se hotărăște să urmeze dreptul. În 1850 a fost admis în barou: „un porumbel printre vulturi” spunea el. Acum să-l căutăm pe Cayley. Artur Cayley s-a născut în 1821 și dovedind calități deosebite a fost trimis să studieze la Cambridge. La 21 de ani a fost clasat primul la examenul special de matematici și numit agregat la „Trinity College”. Lucrările lui de matematici curgeau cu duiumul. De altfel, Cayley s-a clasat ca al treilea dintre matematicienii care au scris mai mult. Primii doi au fost Euler, Cauchy și apoi Cayley! Dar și el iubea cu pasiune literatura, însă nu citea orice, așa cum făcea Sylvester. El avea anumiți autori preferați: Walter Scott, Byron, Shakespeare, Thackeray. Cunoștea bine limbile clasice și moderne, îi plăceau ascensiunile în munți și picta. Așadar și Cayley ajunsese la o situație cum nu se poate mai bună. În fiecare vacanță pleca în străinătate, a urcat Alpii, a vizitat Italia. Și totuși, numai peste 4 ani părăsește Cambridge și pleacă la Londra

unde se decide să urmeze dreptul. În trei ani termină și în 1849 este numit avocat. A început să pledeze dar nu a neglijat deloc matematicile, ci le făcea pe amândouă. Acum, vă închipuiți ce s-a întâmplat în 1850? Eu nu. Cine i-a mînat unul către altul? Cayley avea 29 de ani, era un blond cu înfățișare delicată, senină, calm și rezervat, iar Sylvester, de 36 ani, un brunet mic și îndesat, cu umerii largi și mereu agitat, parcă gata de luptă. Cum s-a stabilit legătura dintre ei tocmai acolo unde numai de atmosferă matematică nu putea fi vorba? Și totuși așa a fost. Acolo s-au întâlnit întâi și s-au legat cu o prietenie, singura care în viața lui Sylvester a rămas neschimbată. În anul 1851 — un timp fantastic de scurt pentru epoca de atunci — Sylvester publică din nou un articol de matematici, tocmai despre determinanții de care am vorbit noi mai înainte. „Teorema mi-a fost sugerată, în parte, scria el, în cursul unor discuții cu domnul Cayley, datorită căruia am regăsit bucuriile vieții matematice“. Ani de zile au profesat amîndoi avocatura și au scris împreună lucrări de matematici. Așa s-a întâmplat că peste 4 ani, într-o problemă, tot în legătură cu determinanții, Sylvester s-a gîndit să numească tabloul de numere din care deducea determinanții, *matrice*, fără să-l preocupe însă în particular aceste matrice, iar Cayley, care era un spirit mai profund și îi plăcea să cerceteze toate, pînă în cele mai mici amănunte, a arătat că aceste tablouri de numere, matricele, pot fi demne de cercetare. Astfel, în 1858 a publicat *Teoria matricelor*. Articolul a avut drept consecință faptul că azi matricele algebrice au găsit aplicații în toate domeniile, nu numai ale matematicilor, dar și în fizică — la sfîrșitul veacului trecut, matematicianul P.G. Tait afirma că „Cayley a făurit armele viitoarelor generații de fizicieni“ — și chiar în problemele de economie socială. Dealtfel, în domeniul algebrei, în care și-a făcut apariția, calculul matriceal a inspirat cercetarea structurilor algebrice și, în secolul al XX-lea, obiectul algebrei a trecut de la teoria ecuațiilor algebrice la teoria structurilor algebrice“.

— Bine, dar nu ne-ai spus ce s-a mai întâmplat cu Cayley și Sylvester. Au rămas pînă la urmă în avocatură?

— Nu, de Sylvester nu-i de mirare, dar chiar și Cayley, după 14 ani de practică s-a lăsat de meserie. Tocmai atunci, Universitatea din Cambridge a creat o nouă catedră de matematici și l-a invitat pe Cayley să o ocupe. Cayley a făcut-o deși câștigul lui de avocat era cu mult mai mare decât leafa de profesor. Atunci s-a mai întâmplat un eveniment în viața lui. În 1864 s-a însurat, spre deosebire de Sylvester care a rămas burlac. Sylvester s-a lăsat de avocatură și mai repede. În 1854, așadar numai peste 4 ani, cerea un post de profesor la Academia regală militară din Woolwich, post pe care l-a obținut abia peste un an. A rămas acolo pînă în 1870 cînd a împlinit limita de vîrstă de atunci — 55 de ani, și a fost scos la pensie. A plecat la Londra și iar s-a lăsat de matematici. A publicat o carte despre *Regulile de versificație*, făcea versuri, citea, juca șah și era disperat că-i pensionar. Dar nici asta nu a durat mult. Peste 6 ani, pleacă din nou în America și se angajează ca profesor de matematici la Universitatea John Hopkins din Baltimore. La doi ani, după ce s-a stabilit aici, fondează (1878) revista matematică „American Journal of Mathematics”. În 1881, Cayley deși avea copii mari și traversarea oceanului nu era chiar sigură, acceptă să vină la Baltimore, ca oaspete al acestei Universități, unde a ținut cursuri o jumătate de an. Aceste cursuri au fost ascultate cu entuziasm și cu regularitate de studenți și de către Sylvester, care atunci avea 67 de ani! Desigur că aceasta nu a fost ultima lor întâlnire. Peste doi ani, în 1883, Sylvester a fost chemat ca profesor la Universitatea din Oxford, unde s-a făcut, pe neașteptate, un post vacant. Avea 72 de ani, dar ce însemna pentru el vîrsta? A plecat din Baltimore, deși de data aceasta cu părere de rău și în 1885 începe un alt curs de matematici cuprinzînd cele mai noi teorii de atunci, asupra invariantilor, domeniu în care a publicat multe lucrări împreună cu Cayley. Nu a uitat să o amintească în fața studenților din Oxford: „cu toate că este mai tînăr ca mine, Cayley a fost părintele meu spiritual, el a fost primul care mi-a deschis ochii și i-a curățit de orice ceață, așa că de atunci ei au putut vedea și însuși misterele

adânci ale credinței noastre în matematici“. Cayley a murit în 1895. Peste doi ani Sylvester l-a urmat.

— A fost interesantă această poveste, dar, drept să-ți spun că o găsesc foarte naturală, am spus eu. Aveau multe trăsături comune, pasiunea pentru literatură în primul rând, dacă scoatem matematica din discuție. Chiar dacă aveau firi diferite, și unul și celălalt au trecut peste neînțelegeri, care nu puteau egala bucuriile pricinuite de „misterele“, cum spunea Sylvester, ce le trăiau când gîndeau matematică.

— Eu nu sînt chiar de părerea aceasta, a intervenit Aurel Popescu. În lumea mea, am avut de multe ori ocazia să întîlnesc oameni care se detestau, deși, după părerea mea, ar fi trebuit să simtă unul pentru altul admirație ca să nu mai zic prietenie, așa că, pentru mine cazul Cayley-Sylvester nu-i deloc obișnuit.

— Cred că Aurel are foarte multă dreptate. Uite, eu m-am gîndit de multe ori la această problemă, cînd lîngă ceașca mea de cafea veneau să se adune matematicienii pe care i-am îndrăgit, sau i-am adorat. Stăteau alături și îi întrebam, de ce? De ce voi, cei mai mari dintre marii savanți ai antichității, Arhimede și Apollonios, v-ați întîlnit și v-ați detestat? De ce ați fugit unul de altul, ba chiar n-ați lăsat să fi trecut fără urme această aversiune a unuia pentru altul și ați strecurat-o în scrierile voastre, ce ar fi fost altfel fără nici o pată? De ce voi, minți luminate ale Renașterii, Tartaglia și Cardan, nu ați fost prieteni? Chiar întîlnirea voastră nu v-a mișcat deloc? Ați stat cîteva zile sub același acoperiș, ați discutat și totuși, în nici unul dintre voi nu a vibrat ceva tainic, nu v-a apropiat, ci din contra, v-a despărțit și v-a făcut să vă urîți, cînd ceea ce a fost mai bun în voi, ceea ce a rămas după voi, ar fi trebuit să vă lege? De ce? De ce voi, marii Descartes și Fermat ați fugit unul de altul? Cine era mai în măsură decît voi doi, să vă poată înțelege unul pe altul și cu cine ați fi putut voi împărți mai bine bucuriile descoperirilor voastre, care se asemănau într-un tot? De ce, tu marele Gauss, principele și primul matematician al lumii, nu ai întins o mînă celui mai mic frate al tău, János Bolyai, care te adora și te-ar fi adorat mereu dacă ai fi împărțit cu el

bucuria descoperirii geometriilor neeuclidiene, care era în aceeași măsură a amîndurora? De ce? De ce voi doi mari și aleși matematicieni ai zilelor noastre, Kronecker și Georg Cantor, v-ați făcut atîta sînge rău unul altuia? De ce? Nu am amintit aici decît pe cîtiva, de care mi-am adus acum aminte, mai sînt și mulți alții, dar ar fi mai bine să revenim la problema noastră, fiindcă, la această întrebare, nu-mi poate răspunde nimeni și chiar dacă mi-ar răspunde, faptele s-au petrecut! Am vrut să vă vorbesc despre o matrice de numere, dar azi noțiunea s-a generalizat, putem avea o matrice formată din ori și ce fel de elemente. De pildă, în același articol, profesorul Mircea Malița ne prezintă o *matrice de idei*. Este de-a dreptul uluitor să-ți vină în minte să condensezi, într-o matrice de 4 coloane și 10 linii, cu alte cuvinte într-o singură pagină de carte, observații, rezultate, ipoteze, concluzii, realizări sau înfăptuiri viitoare! Mă uit la această matrice și mă întreb, ca odinioară Tait, oare nu este ea o armă făurită pentru viitorii descoperitori?

— Nu mi-am pus această întrebare, dar se pare că nu-i lipsită de temei. Cît privește concizia, însuși profesorul Mircea Malița are nevoie de cîteva pagini ca să ne introducă în cuprinsul, inedit și greu de epuizat, al „acestui tabel-matrice, rezumator și generator de noi structuri științifice și tehnice“.

— Tu observi că-i trebuie cîteva pagini ca să-l explice, eu mă gîndesc cîte pagini sînt condensate în fiecare *cuvînt-element* al matricei. De cîtă documentare și de cîtă cîntărire a informațiilor a fost nevoie pînă cînd a putut să rezulte o pagină, peste care *cineva* a aruncat o privire, cine știe dacă nu cu aceeași viteză cu care mergea și trenul în care se afla?

— Care, mă rog, ar citi altfel, cînd ar ști foarte bine că totul îi va fi explicat *cu plăcere* și mai clar decît ar putea înțelege el singur, oricît și-ar fi bătut capul? Cred că ai așteptat acest compliment, nu-i așa? Iată-l! Ai dezlegarea!

— Spune tu, Aurel, mai departe, măcar că n-ai dezlegare, că la problema aceasta văd că te pricepi mai bine decît mine.

— După mine, matricea și-a atins scopul, fiindcă, privind-o cu atenție, vezi în ea un mecanism în plină funcționare, me-

canismul extrem de complicat al activității științifice și tehnice.

— Mă uit de pildă la *metode*, așezate în coloana a treia, și le leg de *atitudini*, puse în coloana întâia, cum era și natural, dacă ele se consideră ca fiind impuls al cercetării. Alegînd ca metodă de cercetare *Teoria probabilităților*, ce atitudine se putea impune mai bine, decît *acceptarea aleatorului*? Și tot așa, *teoria deciziilor și a jocurilor* cerea ca atitudine *acceptarea incertitudinii* după cum atitudinea *teoretică* cheamă numai decît în ajutorul ei *Teoria modelelor*. Și ajungînd aici, îmi vin în minte strădaniile oamenilor din epocile cele mai îndepărtate ca să găsească un model pentru universul ce-i înconjură. Aveau așa de puține cunoștințe de matematici și, totuși, rîvneau la cea mai grandioasă modelare posibilă, la aceea a cosmosului! Și pe ce se bazau? Numai pe logică și nimic mai mult, pe judecata că trebuie să existe o analogie între fenomenele complexe și inaccesibile ale naturii și altele, mai simple și accesibile lor.

— Eu nu consider aceste lucruri chiar numai din punct de vedere sentimental, ci și practic. Omul a alergat în mod obligatoriu către model, trebuia să alerge, fiindcă avea nevoie de el în viața lui de toate zilele. Stabilind poziția și mișcările corpurilor cerești, el putea măsura timpul și putea prevedea anumite fenomene astronomice pe care fiindcă nu le înțelegea, de aceea se temea de ele, ca de pildă de eclipsele de soare, a observat Aurel Popescu.

— Ceea ce ai spus este foarte adevărat, însă, eu îl rog pe Teodor să-și continue șirul gîndurilor.

— Îți plac poveștile ca unui copil! Mă gîndeam că, nu știu ce modele au existat pentru sistemul solar mai înainte de modelul geometric imaginat de Ptolemeu, dar acela era de toată frumusețea! O mulțime de cercuri, unele peste altele, descriind curbe foarte complicate și care se mai complicau încă de către cei ce căutau să modifice modelul original mai adăugîndu-i încă un cerculeț! Și acest model a durat așa, peste 1 000 de ani, pînă ce a venit Kepler și a suprimat, dintr-o dată, toată puzderia de cercuri și cerculețe și a dat un nou model geometric, simplu și elegant, în care



J. KEPLER

locul de cinste îl are elipsa, acea curbă studiată odinioară de Arhimede și mai ales de către Apollonios. Și eu cât s-a dezvoltat știința matematică, cu atât au crescut și pretențiile omului de a-și construi modele, modele pentru toate fenomenele și evenimentele din jurul lui sau numai pentru anumite aspecte ale lor. În epoca noastră s-a dezvoltat un capitol special care se ocupă de metodele de modelare.

— Acuma iar am să mă amestec. Consider că nu-i nimic de mirare în această dezvoltare, modelul matematic fiind chiar o formă a procesului de cunoaștere. E de ajuns să ne amintim de modelele succesive ale atomului, cel al lui Rutherford, apoi al lui Bohr... oare nu prin acestea s-a ajuns la energia nucleară? Astăzi modelarea este o problemă ce interesează deopotrivă biologia ca și lingvistica sau economia...

— Vezi, tocmai aceste gânduri mi-au fost trezite de cel de-al șaptelea cuvânt din coloana atitudinilor, *atitudinea teoretică*. Și trebuie să menționez că eu am privit tabelul-matrice destul de superficial, adică avînd ochiul unui dile-

tant. Cîte sugestii pot trezi însă, în întregimea lui, aceste notații unui specialist?

— Bineînțeles. Dealtfel, tu nu te-ai legat decît de două dintre cele patru coloane, privind mutațiile și inovațiile, pe care le menționează aici autorul. Căci iată ce spune el: „Cele patru nivele pe care le-am identificat, integrează accente diferite ale preocupărilor științifice, tehnice, economice, sociale, justificînd și impresia de relative autonomii. *Atitudinea* se leagă de argumente economice, politice sau istorice: *demersul* — de psihologia socială și de un anume profil mental; *metodele științei* — de condițiile și implicațiile tehnologice, științifice, logice, *conceptele* — de dezvoltările fundamentelor și logicii”.

— Atunci să nu ne oprim aici, ci să citim și concluzia, de la care, și cu care, am început de fapt discuția noastră: „Modificările în structura acestui tabel explică salturile și caracterul revoluționar al exploziei științei și tehnologiei, și nu profuziunea. Semnul revoluției este mutația”. Vezi dar, dragă bădie, că articolul acesta te-a învățat cîte se pot afla dintr-o tabelă statistică. Țin să-ți amintesc aceasta, fiindcă mai zilele trecute afirmai că nu te-ai tenta niciodată să-ți arunci ochii pe o tabelă statistică! Că asta nu-i matematică și nu-ți poate produce vreo bucurie comparabilă cu aceea pe care o încerci ori de cîte ori te întâlnești cu vreo problemă celebră din istoria matematicilor!

— Nu mai spune, adică de unde cunoaște dumnealui farmecul problemelor celebre din istoria matematicilor?

— Asta-i o poveste mai veche. A început cam de mulțisor, într-o vară pe cînd era el aici, la Cîmpulung. Se nimeriseră niște zile ploioase și atunci, mai mult în glumă decît în serios, am început să-i spun o problemă, care se lega și de mitologie și a fost mult discutată de către matematicieni, secole de-a rîndul. L-a interesat și s-a prins în joc așa de bine, încît după aceea, n-am mai putut scăpa! Dorea tot alte și alte probleme noi încît, bietul de mine, ajunseseam la ananghie! Trebuie să știi că, de multe ori, ne întâlneam *numai și numai* ca să-l pun la curent cu o altă problemă care a interesat generații întregi de matematicieni!

— Și de ce nu mi-ai spus și mie? Aș fi venit bucuros, ca azi, să trag și eu cu urechea!

— Nu trebuie să te superi de asta, de fapt, de multe ori au asistat și alții la discuțiile noastre, așa cum s-a întâmplat și acum, dar niciodată ele nu au fost aranjate dinainte; dimpotrivă. De multe ori s-a întâmplat ca discuția să fie provocată tocmai de ceva neprevăzut. Și te rog să nu-l consideri pe prietenul matale ca pe o victimă a nesațiului meu! În realitate și lui îi făcea tot așa de mare plăcere să discutăm, ca și mie.

— Atunci spuneți-mi măcar ce fel de probleme ați discutat?

— Cîte nu am discutat noi? Despre numere, despre tăietura de aur, despre pătratele magice, despre numerele prietene, apoi despre problema celor patru culori, despre perspectivă, despre teoria grupurilor, despre poliedre, despre mașinile de calcul și multe altele.

— Da, dragă Aurel, asta a fost pînă nu demult. Dar prietenul meu uită să-ți spună că și în gusturile lui s-a petrecut o *mutație* aș spune, ca să rămînem în terminologia de azi, o revoluție, astfel că problemele acestea pe care ți le-a enumerat și despre care se bătea pînă mai ieri cu pumnul în piept că-s singurele în stare să-l ridice pe culmile sublimului, astăzi au trecut pe planul al doilea. De data aceasta, am văzut că nu prea făcea haz de aceste probleme particulare ce au fost în stare să captiveze mintea atîtor matematicieni celebri, ci a dorit să atace *probleme mai generale*, dacă-mi este permisă analogia, *probleme universale*, chiar la nivel cosmic dacă s-ar putea!

— Analogia cu cine? Nu înțeleg ce vrei să spui?

— Ai să înțelegi cînd îți voi spune care au fost problemele ce le-am discutat în ultima vreme, de cînd a venit aici.

— Stai, dragă Aurele, să ți le spun eu, și ai să judeci mata singur, dacă nu meritau să fie discutate. Mai întîi despre însăși problema abstracției în matematici, apoi despre axiomatizarea matematicilor elementare, în particular despre axiomatizarea aritmeticii, căci despre axiomatizarea geometriei mai știam eu ceva...

— Apoi, dă-mi mata voie să-ți spun că Teodor avea dreptate! Acestea nu mai sînt probleme la scara Cîmpulungului, ci chiar la nivel cosmic!

— Stai că n-am terminat, am mai zăbovit o zi și-o noapte discutînd problema gîndirii matematice!

— Asta o întrece pe toate! Și cînd mă gîndesc că pe mine m-ar fi mulțumit să aud măcar despre pătratele magice. I-ai arătat cumva și regulile generale de a le construi?

— De toate. Și dacă te interesează am să-ți dau notele despre pătratele magice.

— Și cele despre numerele prietene pe deasupra!

— Fie, adă mîna încoa!

— Poftim! Faceți tîrgul pe spinarea mea!

*

Aceasta a fost ultima dintre problemele pe care am mai discutat-o cu bunul și neuitatul meu prieten Teodor Solonar, în amintirea căruia le-am și notat, pe cît mi-am mai adus aminte.

U. J. C. M. BUZĂU
BIBLIOTECA
ORAȘUL R. SĂRAI

PROBLEMA NUMERELOR PRIETENE SAU DESPRE TIRANIA NUMERELOR ÎNTREGI	5
PROBLEMA ABSTRAȚIEI ÎN MATEMATICI SAU O METODĂ DE CERCETARE A UNIVERSULUI	44
PROBLEMA AXIOMATIZĂRII MATEMATICILOR ELEMENTARE SAU O POVESTE CU JOFUL DE ȘAH	94
PROBLEMA GÎNDIRII MATEMATICE SAU UNELE INCURSIUNI PRIN MEANDRELE RAȚIONAMENTULUI	144
PROBLEMA REVOLUȚIEI ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE SAU CUM S-A OPUS STATISTICA LA CREAREA UNUI MIT	175

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Bun de tipar 7.IV.1976. Apărut 1976. Comanda
nr. 712. Tiraj : 67 020 broșate. Coli de tipar : 13.



Comanda nr. 60 056
Combinatul Poligrafic „Casa Scintei”
București — Piața Scintei nr. 1,
Republica Socialistă România.

Volumul de față prezintă o nouă serie de probleme interesante și actuale: problema abstracției în matematică, problema axiomatizării matematicilor elementare, problema gândirii matematice și altele.

Autoarea, prin aducerea discuțiilor în sfera contemporană, scoate în evidență ideea că drumul rămîne deschis unor cercetări viitoare, că dezvoltarea matematicii continuă pe diverse planuri, contribuind în mod substanțial la dezvoltarea societății.